

B.333  
M.54

# МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАЗМЫ

Спектроскопия, лазеры, зонды

Под редакцией  
В. ЛОХТЕ-ХОЛЬТГРЕВЕНА

Перевод с английского  
под редакцией  
С. Ю. ЛУКЬЯНОВА

Издательство «Мир»  
Москва 1971

Настоящая книга представляет собой коллективный труд, посвященный экспериментальным методам исследования плазмы. Она богато иллюстрирована, содержит обширную библиографию и в целом написана на современном уровне. Достаточно сказать, что по сравнению с коллективной монографией под редакцией Хаддлстоуна и Леонарда, вышедшей в русском переводе в 1967 г. (изд-во «Мир»), она содержит две совершенно новые главы (объемом свыше 100 страниц), посвященные применению лазерной техники для исследования плазмы и работе зондов Ленгмюра в условиях космического полета.

Центр тяжести интересов большинства авторов (и редактора книги) лежит в области физики низкотемпературной плазмы, и это естественным образом наложило известный отпечаток на подбор и распределение материала.

Спектроскопические методы исследования занимают центральное место в современной диагностике плазмы. Не удивительно поэтому, что семь глав книги полностью посвящены вопросам спектроскопии в видимой, ультрафиолетовой и рентгеновской областях. Применение лазерной техники и работа электрических и магнитных зондов рассмотрены в отдельных главах.

Книга представляет интерес для широкого круга физиков-экспериментаторов, работающих в различных областях физики плазмы и ее применений. Материал книги может быть также использован лекторами и преподавателями, аспирантами и студентами физико-технических вузов, где в учебную программу включена дисциплина «Физика плазмы».

БИБЛИОТЕКА  
Института ядерной  
физики СО АН СССР  
ИНВ. № 30388

30

Редакция литературы по физике

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Перед вами еще одна книга, посвященная методам исследования плазмы. Всего четыре года назад была опубликована и вскоре переведена на русский язык большая коллективная монография «Диагностика плазмы» под редакцией Хаддлстоуна и Леонарда [1]. Затем вышел перевод монографии Хелда и Уортона [2] по микроволновой диагностике и оригинальная монография В. Е. Голанта [3], посвященная тому же вопросу. Периодически издаются труды Всесоюзных совещаний по диагностике плазмы, пишутся книги, в которых рассматриваются частные вопросы диагностики, и книги учебного характера [4—7].

Вряд ли следует удивляться такому обилию литературы: методы исследования плазмы исключительно богаты и разнообразны. Они опираются на оптику и атомную физику (спектроскопия во всех длинах волн, корпускулярная диагностика), квантовую электронику (лазерные исследования), ядерную физику (исследование продуктов термоядерных реакций в горячей водородной плазме) и т. д. Часто тот или иной раздел диагностики выдвигается на авансцену, привлекает всеобщее внимание исследователей — происходит экспоненциальный взрыв публикаций, а затем появляется потребность в обобщающем обзоре. Тем временем традиционные разделы также продолжают развиваться, модифицироваться, углубляться и в их недрах созревают условия для очередного прорыва на переднем фронте науки.

Разумеется, каждый новый труд в рассматриваемой области имеет свои отличительные особенности. Предлагаемая книга является переводом основного материала, содержащегося в книге «Диагностика плазмы», вышедшей под редакцией Лохте-Хольтгревена в конце 1968 г. Центр тяжести интересов большинства авторов этого коллективного труда лежит в области физики низкотемпературной плазмы, и это естественным образом наложило известный отпечаток на подбор и распределение материала. В частности, среди спектроскопических иллюстраций мы чаще встречаем ссылки на исследования дуговых разрядов высокого давления, чем на эксперименты, выполненные на плазменных установках, сооруженных в связи с развитием программы работ по управляемому синтезу.

Как видно из содержания книги, спектроскопическим методам исследования плазмы уделено основное внимание. Из одиннадцати глав русского издания первые семь полностью посвящены вопросам спектроскопии в видимой, ультрафиолетовой и рентгеновской областях. Это совершенно естественно и отвечает тому фундаментальному положению, которое спектроскопия — идеальный бесконтактный инструмент исследования — занимает в диагностике плазмы. Значительная часть этого раздела книги написана Лохте-Хольтгревеном, который является признанным авторитетом в области спектроскопии низкотемпературной плазмы.

Восьмая глава — одна из наиболее интересных в книге — посвящена новому, стремительно развивающемуся разделу диагностики плазмы — лазерному рассеянию. Автору главы (Кунце) удалось не только ясно изложить основы томсоновской теории рассеяния света, но и рассмотреть необходимые детали, относящиеся к технике эксперимента.

В двух последних главах разобраны вопросы работы зондов Ленгмюра. Здесь трудно было рассчитывать на особую оригинальность изложения, но использование данных, получаемых при работе зондов в условиях космического полета (гл. 11, автор Бойд), придает этим главам необходимую современность.

Список литературы в русском издании дополнен ссылками на обзоры и наиболее существенные оригинальные статьи, появившиеся после издания книги.

При подготовке книги к русскому изданию было признано желательным сократить ее объем. После долгих колебаний было решено исключить из перевода главу, написанную Германсдорфером и посвященную микроволновой диагностике, малоинтересную и перегруженную расчетами. Исключена также глава (автор — Дравин), в которой разбираются вопросы корпускулярной диагностики. Это можно было сделать с тем большим основанием, что недавно появился превосходный обзор Афросимова и Гладковского [9] на данную тему. Наконец, были опущены две небольшие главы, также написанные Дравином, в которых содержатся материалы, относящиеся к измерению эффективных сечений, коэффициентов переноса, электропроводности и вязкости плазмы.

Перевод книги выполнен специалистами-физиками — В. А. Абрамовым (гл. 1—4), Н. Г. Ковальским (гл. 5 и 8), Д. А. Щегловым (гл. 6, 7 и 9) и В. М. Чичеровым (гл. 10 и 11).

*С. Ю. Лукьянов*  
Июнь 1970 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, перевод с английского, изд-во «Мир», 1967.
2. Хелд М., Уортон Ч. Сверхвысокочастотная диагностика плазмы, перевод с английского, М., 1967.
3. Голант В. Е. Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы, М., 1968.
4. Русанов А. А., Современные методы исследования плазмы, М., 1962.
5. Чернетский А. В., Зиновьев О. А., Козлов А. В. Аппаратура и методы плазменных исследований, М., 1965.
6. Подгорный И. М. Лекции по диагностике плазмы, М., 1968.
7. Душин Л. А., Павличенко О. С. Исследование плазмы с помощью лазеров, М., 1968.
8. Козлов О. В. Электрический зонд в плазме, М., 1969.
9. Афросимов В. В., Гладковский И. Л., ЖТФ, 37 (9), 1557 (1968).



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга была задумана шесть лет назад, но работа над ней временно приостановилась, когда стало известно, что Г. Грим готовит книгу «Спектроскопия плазмы». Тем временем появился ряд книг по физике плазмы и несколько книг по диагностике плазмы. Различные авторы и редакторы в зависимости от их собственных научных интересов делали упор либо на очень горячую плазму, далекую от равновесия, либо на плазму с умеренной температурой, находящуюся вблизи равновесия. Редактор настоящего издания относится ко второй группе, и этот факт, естественно, повлиял на план этой книги.

В книге дан обзор экспериментальных методов исследования плазмы, а также необходимые основы теории (гл. 1 и 2). Наряду с гл. 3—7 по спектроскопии в нее включены главы, посвященные микроволновым методам и лазерной диагностике (гл. 8), электрическим и магнитным зондам (гл. 9—11).

Поскольку большинство теоретических глав было написано с учетом результатов экспериментов, то неизбежно перекрытие с некоторыми экспериментальными главами. Мы полагаем, что этот факт послужит лучшему пониманию.

К сожалению, работа над книгой заняла гораздо больше времени, чем ожидалось. По этой причине в ней могут отсутствовать некоторые новые результаты.

Редактору приятно отметить, что восемь авторов сотрудничают (или сотрудничали раньше) в Институте экспериментальной физики Кильского университета. Редактор благодарит всех авторов и в особенности тех, которые не работают в названном институте, однако написали главы для настоящей книги.

*В. Лохте-Хольтгревен*  
1968 г.

## ИЗЛУЧЕНИЕ ГОРЯЧИХ ГАЗОВ (ТЕПЛОВОЕ И НЕТЕПЛОВОЕ)

Ю. Рихтер\*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

## 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Настоящая глава посвящена вопросам излучения горячих газов и плазмы; в ней приведены наиболее важные формулы и соотношения, которые необходимы для спектроскопической диагностики плазмы. Приняв во внимание размер главы, ее следует рассматривать только как введение в область, которая непрерывно расширялась в течение последних пятнадцати лет параллельно с ростом интереса к физике плазмы. По этой причине здесь опущена теория уширения линий, которая в действительности также относится к теории излучения горячих газов. Она детально обсуждается в гл. 2. То же самое относится и к специальным методам спектроскопической диагностики плазмы, которые рассматриваются в гл. 3 и 4.

Большинство работ по излучению горячих газов, опубликованных до 1950 г., можно найти в астрофизической литературе. Позже они стали появляться во все возрастающем количестве в литературе по физике плазмы. Стандартными астрофизическими учебниками, в которых, естественно, сделан упор на рассмотрение излучения, являются хорошо известные монографии Унвольда [1], Аллера [2] и Амбарцумяна и др. [3].

Монографию Грима [4] можно рассматривать как стандартный учебник по спектроскопии плазмы в лабораторных условиях. В своей книге Грим приводит детальные расчеты относительных сил линий, вероятностей переходов и уширения линий.

Вопросы переноса излучения с учетом эффектов рассеяния упоминаются только в этой главе. Более полно они обсуждаются Чандрасекаром [5], Соболевым [6] и Томасом [7]. Ссылки на работы, посвященные формированию линий в неравновесной плазме, число которых значительно возросло за последние шесть лет, можно найти в [71]<sup>1)</sup>.

## 2. ФИЗИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАЗМЫ

Состояние газа или плазмы, заключенных в полости, стенки которой имеют одинаковую, постоянную температуру, можно описать всего несколькими параметрами: температурой, плотностью и концентрациями имеющихся элементов. Плазма находится при этом в состоянии полного термодинамического равновесия, и названные параметры являются термодинамическими переменными.

Если стенки полости удалить, то начнется диссипация энергии, обусловленная излучением и теплопередачей. Для поддержания стационарного состояния потери энергии должны компенсироваться нагревом плазмы. При описании такой реальной плазмы, которая уже не находится в состоянии термодинамического равновесия, приходится использовать бесконечное число параметров. Например, для каждой степени свободы следовало бы ввести

\* J. Richter, Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel.

<sup>1)</sup> Research in Space Science, Special Report No. 174, Cambridge, Massachusetts, 1965.

свою функцию распределения, зависящую от координат и, если плазма нестационарна, от времени.

Если представить себе огромное число процессов взаимодействия, происходящих в плазме между частицами, а также между частицами и фотонами поля излучения, то сначала задача описания реальной плазмы кажется безнадежной. Для многих плазм, однако, имеются способы описания их состояния относительно простым путем. Чем больше видов взаимодействия приходится учитывать и чем чаще они происходят, тем ближе состояние плазмы к равновесному, которое осуществляется в полости «черного тела». Этот результат хорошо известен из статистической термодинамики. Чем интенсивнее происходит обмен энергией между степенями свободы, тем ближе функции распределения к распределениям Больцмана. Это означает, что функции распределения описываются одним параметром, который имеет смысл локальной температуры. Противоположным является случай, когда плазма очень далека от термодинамического равновесия. В общем в такой плазме важны процессы взаимодействия только нескольких типов, и снова появляется возможность получить простую модель состояния плазмы. Но для исследования неравновесной плазмы необходимо располагать сведениями о процессах взаимодействия и их эффективных сечениях. Чем ближе плазма к состоянию полного равновесия, тем менее важно знание детальных процессов и их сечений.

### 3. СПЕКТРОСКОПИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ

Одна из основных задач экспериментальной физики плазмы состоит в определении состояния плазмы или в определении ее отдельных параметров. Такими параметрами могут быть температура, плотность электронов, плотность тока или другие величины, которые представляют интерес для экспериментатора. Если состояние плазмы известно, то, естественно, можно найти все параметры, представляющие интерес. Методы, которые дают информацию о состоянии или о параметрах плазмы, называют диагностическими методами.

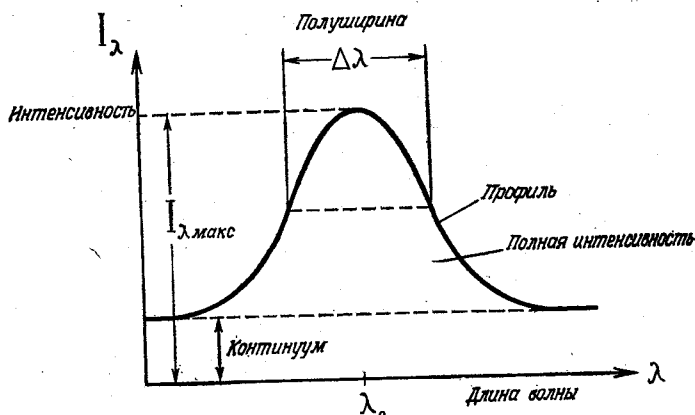
Измерения, проводимые в плазме, редко прямо дают требуемые параметры. Обычно измеряемая величина зависит от нескольких параметров, и для интерпретации измеренных значений почти всегда необходимо иметь определенное представление о состоянии плазмы. Это в особенности характерно для спектральной диагностики, к которой относится все нижеследующее.

Прежде чем обсуждать в деталях спектроскопические методы исследований плазмы, следует показать, почему им часто отдается предпочтение перед многими другими известными методами. Для этого имеются две важные причины: с одной стороны, во время таких измерений отсутствует возмущающий эффект, который присутствует, например, при любых зондовых измерениях; с другой стороны, информация, содержащаяся в калиброванном спектре, весьма велика.

Предположим, что измеряется спектральная интенсивность какой-нибудь одной линии и в ее окрестности (фиг. 1.1); тогда сам факт присутствия линии с данной длиной волны свидетельствует о том, что определенный элемент находится в плазме на определенной ступени ионизации. Профиль линии дает сведения о кинетической температуре излучающего атома (доплеровское уширение) или о плотности возмущающих частиц (уширение из-за эффектов давления). Полная энергия линии позволяет сделать заключение о температуре возбуждения и плотности излучающих частиц данного сорта. Из непрерывного фона часто можно определить плотность электронов. Наконец, интенсивность в максимуме линии может дать сведения о нижнем пределе температуры плазмы или о самой температуре плазмы. Если принять во внимание, что в спектре обычно присутствует не одна линия

и что спектр на фотопластинке может дать при развертке (перпендикулярно направлению дисперсии) сведения о распределении локальной интенсивности, то можно понять важность спектроскопических методов для исследований плазмы.

Трудности спектроскопической диагностики заключаются, как отмечалось выше, в необходимости детальной интерпретации измеренного спектра. Если отвлечься от нескольких простых случаев, когда возможно оценить параметры плазмы непосредственно по измеренным величинам, взятым из спектра, то единственным способом определения состояния плазмы является детальный анализ спектра. Этот анализ проводится следующим образом.



Ф и г. 1.1. Информация, извлекаемая из спектра.

Сначала пытаются объединить всю существующую информацию о плазме с очевидными и наиболее существенными спектральными данными для того, чтобы построить простую модель плазмы. После этого возвращаются к стандартным моделям, основывающимся на определенных отклонениях от термодинамического равновесия (см. § 6). Геометрию плазменного образования и распределение температуры в нем следует выбирать в соответствии с правдоподобными предположениями, возможно, варьируя некоторые параметры. Затем рассчитывают излучение света в принятой модели плазмы и измеренный спектр сравнивают с этим спектром. Расхождение спектров следует использовать для улучшения первой модели. Эту процедуру следует повторять до тех пор, пока не будет достигнуто наилучшее, по возможности, совпадение спектров.

#### 4. ОБЩИЕ КОНТУРЫ ЭТОЙ ГЛАВЫ

В § 2 детально рассматриваются интенсивность излучения и другие величины, которые тесно связаны с интенсивностью.

В § 3 приведены хорошо известные формулы и соотношения, которые выполняются для плазмы в термодинамическом равновесии. Знание этих соотношений важно для понимания всех последующих параграфов.

Основные методы расчета спектра, излучаемого плазмой или горячим газом, находящимися в известном физическом состоянии, даны в § 4, 5 и 7. В § 4 приводится расчет коэффициентов поглощения и испускания спектральных линий. В § 5 рассматриваются те же самые коэффициенты для непрерывного излучения. В § 7 обсуждается уравнение переноса излучения. Это уравнение дает связь между локальными коэффициентами поглощения и испускания, определенными в заданной точке внутри плазмы, и интенсивностью излучения, которая может быть измерена вне плазмы.

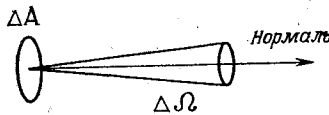
В § 6 обсуждается несколько простых моделей состояния плазмы. Эти модели можно использовать в тех случаях, когда плазма — как это почти всегда и бывает — не находится в состоянии термодинамического равновесия.

Рассмотрение ограничивается случаем, когда в плазме возбуждение и ионизация частиц обусловлены в основном столкновениями частиц, а не радиационными процессами. Такую плазму мы назовем плазмой с доминирующей ролью столкновений (столкновительной). Это ограничение, которое упрощает рассмотрение переноса излучения, по-видимому, возможно для большинства лабораторных плазм. В плазме с доминирующей ролью излучения (бесстолкновительной) существующей в звездных атмосферах, вместо истинного поглощения может преобладать рассеяние. Поэтому определение локальных коэффициентов поглощения и испускания не имеет смысла.

## § 2. ИНТЕНСИВНОСТЬ И ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

### 1. ИНТЕНСИВНОСТЬ

Излучение любой природы, в частности электромагнитное излучение, описывают величиной, называемой интенсивностью излучения или просто интенсивностью. Она обозначается буквой  $I$  и определяется как лучистая



Ф и г. 1.2. Определение интенсивности.

энергия, которая пронизывает единицу площади за единицу времени внутри единичного телесного угла перпендикулярно выбранной площадке (фиг. 1.2).

Если лучистую энергию обозначить через  $E$ , время — через  $t$ , площадь и телесный угол — через  $A$  и  $\Omega$  соответственно, то определение интенсивности принимает вид

$$I = \lim \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A \Delta \Omega} \quad \text{при } \Delta t, \Delta A, \Delta \Omega \rightarrow 0. \quad (1)$$

Определенная таким образом интенсивность включает излучение на всех частотах, и ее следует называть «полной интенсивностью». Она представляет меньший интерес в спектроскопии горячих газов, где важно спектральное распределение лучистой энергии и где, следовательно, имеют дело с интенсивностями, приходящимися на единичные интервалы частот или длин волн. Эти «спектральные интенсивности» определяются<sup>1)</sup> аналогично (1):

$$I_\nu = \lim \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A \Delta \Omega \Delta \nu} \quad \text{при } \Delta t, \Delta A, \Delta \Omega, \Delta \nu \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$I_\lambda = \lim \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A \Delta \Omega \Delta \lambda} \quad \text{при } \Delta t, \Delta A, \Delta \Omega, \Delta \lambda \rightarrow 0. \quad (3)$$

Поскольку  $I_\nu \Delta \nu = -I_\lambda \Delta \lambda$  и  $\lambda^2 \Delta \nu = -c \Delta \lambda$ , то

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Часто их называют «светимостями».

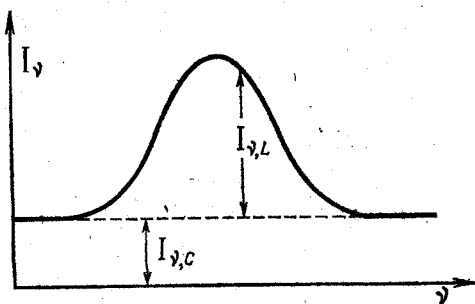
$$I_\nu = \frac{\lambda^2}{c} I_\lambda. \quad (5)$$

Как правило, спектральной интенсивности  $I_\nu$  отдают предпочтение перед  $I_\lambda$ . Шкалу длин волн и интенсивность  $I_\lambda$  используют только в практической спектроскопии. При теоретическом же рассмотрении удобно использовать угловую частоту  $\omega$  и интенсивность  $I_\omega = I_\nu/2\pi$ .

Если в излучении присутствуют спектральные линии, то можно ввести понятие «интенсивность линии»  $I_L$ . В окрестности линии интенсивность  $I_\nu$  или  $I_\lambda$  можно разделить на две части: непрерывную  $I_{\nu,c}$  и дискретную  $I_{\nu,L}$  (фиг. 1.3). Интеграл от дискретной части дает интенсивность линии

$$I_L = \int_{\text{Линия}} I_{\nu,L} d\nu = \int_{\text{Линия}} I_{\lambda,L} d\lambda. \quad (6)$$

Интенсивность, вообще говоря, зависит от положения и от направления в пространстве:  $I_\nu = I_\nu(x, y, z, \theta, \varphi)$ . Если хотят просто выразить



Ф и г. 1.3. Определение интенсивности линии.

зависимость от направления, то пишут  $I_\nu(\theta, \varphi)$ . Если ограничиваются одним направлением и хотят указать только зависимость от положения, то пишут  $I_\nu(x)$ .

Если интенсивность не зависит от направления, то поле излучения называется изотропным. Изотропность может иметь место для всех частот (например, излучение «черного» тела) или для узкого интервала частот (например, «ядро» запертой линии). Поле излучения лабораторных источников света в общем сильно неизотропно.

Поле излучения светящихся газов в электрическом или магнитном полях может быть поляризовано. Для описания этого радиационного состояния принимают во внимание расщепление излучения на две перпендикулярно поляризованные компоненты.

Важно, что интенсивность сохраняется при любом преобразовании светового пучка с помощью оптической системы. Так, например, если площадку  $\Delta A$  поверхности излучающего газа «без утечек» спроектировать оптической системой, исправленной так, чтобы было удовлетворено условие синусов Аббе, на поверхность  $\Delta A'$  вне газа, то интенсивность на  $\Delta A'$  будет равна исходной интенсивности на  $\Delta A$ . Доказательство следует из сохранения энергии. Высказанное утверждение справедливо для любого увеличения, но только при увеличении 1:1 распределение интенсивности по направлениям в изображении оказывается таким же, как и в предмете. Разумеется, речь идет о всех направлениях, которые допускаются апертурой оптической системы. Сохранение интенсивности существенно облегчает измерение интенсивности вне источника света.

При анализе процессов рассеяния часто используется усредненная интенсивность. В соответствии с астрофизическими обозначениями ее следует обозначить через  $J_\nu$  или  $J_\lambda$ :

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\vartheta, \varphi) d\Omega, \quad J_\lambda = \frac{1}{4\pi} \int I_\lambda(\vartheta, \varphi) d\Omega. \quad (7)$$

В случае изотропного излучения  $J_\nu = I_\nu$ .

## 2. ПЛОТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ

С интенсивностью излучения тесно связана плотность энергии поля излучения  $u_\nu$  или  $u_\lambda$ , которая ответственна за взаимодействие излучения и атомов.

Плотность энергии можно рассчитать, если известна интенсивность для всех направлений,

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu(\vartheta, \varphi) d\Omega, \quad u_\lambda = \frac{1}{c} \int I_\lambda(\vartheta, \varphi) d\Omega. \quad (8)$$

Между  $u_\nu$  и  $u_\lambda$  существует такая же связь, как и между соответствующими интенсивностями:

$$u_\nu = \frac{\lambda^2}{c} u_\lambda. \quad (9)$$

Для полной плотности излучения имеем

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda. \quad (10)$$

Из определений (7) и (8) можно получить следующие соотношения между усредненной интенсивностью и плотностью излучения:

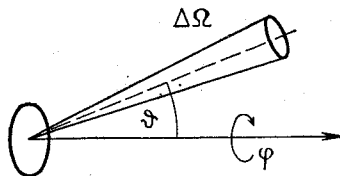
$$J_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu, \quad J_\lambda = \frac{c}{4\pi} u_\lambda. \quad (11)$$

Для изотропного поля излучения имеем

$$u = \frac{4\pi}{c} I, \quad u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu, \quad u_\lambda = \frac{4\pi}{c} I_\lambda. \quad (12)$$

## 3. ЛУЧИСТЫЙ ПОТОК

Другой величиной, которая выводится из интенсивности, является лучистый поток  $H$ ; он определяется лучистой энергией, проходящей за 1 сек



Ф и г. 1.4. Определение потока излучения.

через единицу площади. Если  $\vartheta$  есть угол между направлением излучения и нормалью к площадке (фиг. 1.4), то для лучистого потока получаем

$$H = \int I(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega = \int_0^\infty H_\nu d\nu = \int_0^\infty H_\lambda d\lambda. \quad (13)$$

где

$$H_{\nu} = \int I_{\nu}(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega, \quad H_{\lambda} = \int I_{\lambda}(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega. \quad (14)$$

В случае изотропного поля излучения лучистый поток обращается в нуль, поскольку через единицу площади с обеих сторон проходит одна и та же величина лучистой энергии. Лучистый поток можно разделить на две компоненты. Первая компонента  $H^+$  — это поток, проходящий через поверхность слева направо, вторая компонента  $H^-$  — справа налево. Таким образом, имеем

$$H = H^+ - H^-, \quad (15)$$

где

$$H^+ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\varphi d\vartheta, \quad (16)$$

$$H^- = - \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} I(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\varphi d\vartheta. \quad (17)$$

Соответствующие соотношения справедливы для  $H_{\nu}$  и  $H_{\lambda}$ . Для изотропного поля излучения

$$H^+ = H^- = \pi I, \quad H_{\nu}^+ = H_{\nu}^- = \pi I_{\nu}, \quad H_{\lambda}^+ = H_{\lambda}^- = \pi I_{\lambda}. \quad (18)$$

Следует помнить, что в астрофизической литературе лучистый поток  $H_{\nu}$  обозначается через  $\pi F_{\nu}$ .

### § 3. СООТНОШЕНИЯ, ИМЕЮЩИЕ МЕСТО В СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ

#### 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Если горячий газ или плазма находится в полном термодинамическом равновесии (что выполняется в любой полости с постоянной температурой стенок), его физическое состояние можно полностью определить с помощью конечного числа термодинамических переменных. Этими переменными являются температура, давление газа и, если в состав газа входит несколько элементов, концентрации этих элементов. Исчерпывающее описание физического состояния системы означает, что число частиц или «осцилляторов» в любом энергетическом состоянии может быть рассчитано исходя из термодинамических переменных. В этом параграфе и будут приведены необходимые формулы и дано их краткое обсуждение.

Очевидно, что лабораторная или астрофизическая плазма <sup>1)</sup> почти никогда не находится в полном термодинамическом равновесии. Тем не менее чрезвычайно важно знать соотношения, выполняющиеся в случае термодинамического равновесия. Для этого имеются две причины:

1) Многие плазмы находятся в состоянии, которое не очень сильно отличается от идеального равновесия. Такое состояние обозначается термином «локальное термодинамическое равновесие» (ЛТР), и при этом считается, что внутренние и внешние энергетические состояния отдельных частиц в плазме заселены так же, как и в состоянии полного термодинамического равновесия, но сопутствующее поле излучения черного тела полностью или частично отсутствует либо же ослаблено. Все энергетические распределения, за исключением соотношений для лучистой энергии, подчиняются

<sup>1)</sup> Впредь термином «плазма» мы будем обозначать все горячие газы, даже с исчезающе малой степенью ионизации!



равновесным соотношениям, так что более подходящим было бы скорее название «неполное равновесие», чем «локальное термодинамическое равновесие». Состояние локального термодинамического равновесия будет подробно обсуждаться в § 6.

2) Очень часто соотношения, выполняющиеся при полном равновесии, приходится применять для использования принципа детального равновесия. Принцип детального равновесия означает, что в термодинамической системе, находящейся в состоянии полного равновесия, каждый атомный процесс идет с такой же скоростью, что и обратный процесс. Частота процесса определяется произведением числа частиц  $n_i$ , принимающих участие в этом процессе, на вероятность процесса  $w$ . С помощью этого принципа получают очень полезные соотношения между сечениями реакций или вероятностями столкновительных процессов и теми же величинами для обратных процессов.

## 2. ФОРМУЛА ПЛАНКА

Поле излучения в полости, имитирующей абсолютно черное тело, так же как и поле излучения в термодинамическом равновесии, зависит только от температуры <sup>1)</sup>. Интенсивность равновесного поля излучения (излучение черного тела) дается формулой Планка <sup>2)</sup>

$$I_{\nu}^* = B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c_0^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (19)$$

$$I_{\lambda}^* = B_{\lambda}(T) = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc_0/\lambda kT) - 1}. \quad (20)$$

Подставляя значения постоянной Больцмана  $k$ , постоянной Планка  $h$  и скорости света  $c_0$ , получаем

$$B_{\lambda}(T) = 1,191 \cdot 10^{-5} \lambda^{-5} \frac{1}{\exp(1,4388/\lambda T) - 1} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер}}. \quad (21)$$

Здесь  $\lambda$  — в см,  $T$  — в °К. Из формулы Планка и формулы (8) следует выражение для плотности черного излучения

$$u_{\nu}^* = \frac{8\pi h\nu^3}{c_0^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad u_{\lambda}^* = \frac{8\pi hc_0}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc_0/\lambda kT) - 1}. \quad (22)$$

Интегрируя по  $\nu$ , получаем формулу для потока излучения с поверхности черного тела:

$$H^{**} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c_0^2 h^3} T^4 = \sigma T^4. \quad (23)$$

Это известный закон Стефана — Больцмана. Постоянная  $\sigma$  равна

$$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^4.$$

Для коротких волн ( $hc_0/\lambda kT \gg 1$ ) можно использовать приближение Вина, которое приводит к следующему выражению для  $B_{\lambda}(T)$ :

$$B_{\lambda}(T) \approx \frac{2hc_0^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc_0}{\lambda kT}\right). \quad (24)$$

Для  $hc_0/\lambda kT \ll 1$  выполняется формула Рэля — Джинса

$$B_{\lambda}(T) \approx \frac{2kc_0}{\lambda^4} T. \quad (25)$$

<sup>1)</sup> Если показатель преломления больше единицы [см. формулу (26)]!

<sup>2)</sup> Значения величин в состоянии термодинамического равновесия обозначаются звездочкой.

Согласие (24) и (25) с формулой Планка (20) лучше 5% для  $\lambda T < 0,48 \text{ см} \cdot \text{град}$  и  $\lambda T > 4,3 \text{ см} \cdot \text{град}$  соответственно. Максимум интенсивности излучения черного тела лежит при  $\lambda T = 0,2898 \text{ см} \cdot \text{град}$  (закон смещения Вина).

Все упомянутые выше формулы для черного излучения справедливы в вакууме. Если полость заполнена газом с показателем преломления  $n$ , то формулы для интенсивности и плотности излучения должны быть частично изменены:

$$\begin{aligned} I_\lambda &= B_\lambda(T)_{\text{Планк}} n^2, \\ u_\lambda &= u_\nu(T)_{\text{Планк}} n^3. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку в большинстве случаев  $|n - 1| \ll 1$ , эта поправка несущественна.

### 3. ЗАКОН КИРХГОФА

Испускание света элементом объема плазмы описывается коэффициентом испускания  $\epsilon_\nu$  или  $\epsilon_\lambda$ . Он определяется аналогично удельной интенсивности как лучистая энергия, которая испускается единицей объема излучающего газа в единицу времени, в единичный телесный угол, в единичном интервале частот или длин волн. Если объем обозначить через  $V$ , то

$$\epsilon_\nu = \lim \frac{\Delta E}{\Delta V \Delta t \Delta \Omega \Delta \nu} \quad \text{при } \Delta V, \Delta t, \Delta \Omega, \Delta \nu \rightarrow 0, \quad (27)$$

$$\epsilon_\lambda = \lim \frac{\Delta E}{\Delta V \Delta t \Delta \Omega \Delta \lambda} \quad \text{при } \Delta V, \Delta t, \Delta \Omega, \Delta \lambda \rightarrow 0, \quad (28)$$

где

$$\epsilon_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} \epsilon_\nu. \quad (29)$$

Из определения  $\epsilon$  следует, что коэффициент испускания может зависеть от направления. Это имеет место, когда происходит рассеяние света в неизотропном поле излучения или когда имеется выделенное направление, задаваемое внешними полями (эффекты Зеемана и Штарка) или потоком газа (доплеровский сдвиг). Однако в большинстве случаев (особенно в состоянии термодинамического равновесия) испускание изотропно.

Поглощение света в бесконечно тонком слое плазмы характеризуется зависящим от частоты коэффициентом поглощения  $\kappa'(\nu)$ . Если отдать предпочтение шкале длин волн, то используют  $\kappa'(\lambda)$

$$\kappa'(\nu) = \kappa'(\lambda) \quad \text{для } \nu = \frac{c}{\lambda}. \quad (30)$$

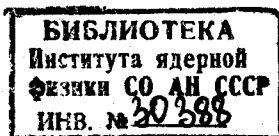
Коэффициент  $\kappa'(\nu)$  можно определить экспериментально с помощью установки, показанной на фиг. 1.5. Если избавиться от возможного собственного излучения поглощающего газа, то уменьшение  $\Delta\phi$  сигнала детектора  $\phi$  после прохождения через газ дается выражением

$$\Delta\phi = -\phi\kappa'(\nu)\Delta x. \quad (31)$$

Толщину слоя газа  $\Delta x$  следует взять достаточно малой, чтобы выполнялось условие  $\phi \gg \Delta\phi$ . Коэффициент  $\kappa'(\nu)$  — это полный коэффициент поглощения; он включает в себя как рассеяние, так и истинное поглощение (см. § 6).

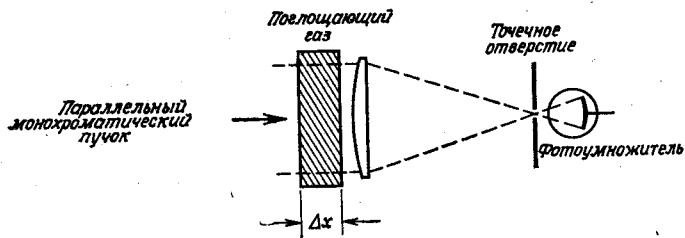
Следует отметить, что определенный таким образом коэффициент поглощения учитывает и индуцированное испускание (см. § 4).

Закон Кирхгофа устанавливает связь между  $\epsilon_\nu$  и  $\kappa'(\nu)$  [или  $\epsilon_\lambda$  или  $\kappa'(\lambda)$  соответственно], если газ находится в термодинамическом равновесии.



Рассмотрим цилиндрический элемент объема  $\Delta V = \Delta A \Delta x$  (фиг. 1.6); энергия, излучаемая из  $\Delta V$  в телесный угол  $\Delta \Omega$  перпендикулярно  $\Delta A$ , дается формулой

$$\Delta E^+ = \varepsilon_\nu \Delta \Omega \Delta A \Delta x \Delta t \Delta \nu. \quad (32)$$



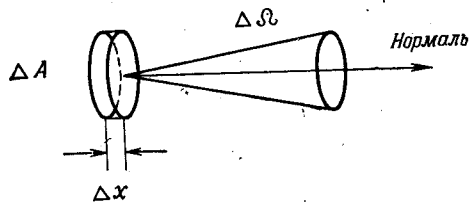
Ф и г. 1.5. Определение и измерение коэффициента поглощения.

Из излучения черного тела, которое проходит через  $\Delta V$  в том же направлении и в том же телесном угле, поглощается энергия  $\Delta E^-$ :

$$\Delta E^- = B_\nu(T) \kappa'(\nu) \Delta x \Delta A \Delta \Omega \Delta t \Delta \nu. \quad (33)$$

Поскольку в равновесии  $\Delta E^+ = \Delta E^-$ , то из (32) и (33) получаем

$$\varepsilon_\nu = \kappa'(\nu) B_\nu(T), \text{ или } \varepsilon_\lambda = \kappa'(\lambda) B_\lambda(T). \quad (34)$$



Ф и г. 1.6. К доказательству закона Кирхгофа.

Это соотношение и есть закон Кирхгофа. Оно справедливо только для случая полного термодинамического равновесия или ЛТР. Это станет ясным, если учесть, что  $\varepsilon_\nu$  и  $\kappa'(\nu)$  зависят только от заселенностей атомных уровней в газе (и, конечно, от атомных постоянных). Следовательно, локальное термодинамическое равновесие означает также и применимость закона Кирхгофа.

#### 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО СКОРОСТЯМ И КИНЕТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Хорошо известное максвелловское распределение по скоростям упоминается здесь исключительно в целях полноты. Если в  $1 \text{ см}^3$  газа, находящегося в термодинамическом равновесии, имеется  $n$  частиц массы  $m$ , то доля  $\Delta n$  частиц, у которых абсолютные скорости лежат между  $v$  и  $v + \Delta v$ , дается формулой

$$\Delta n = n F^*(v) \Delta v = n 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 \Delta v. \quad (35)$$

Это максвелловское распределение по скоростям  $F^*(v)$  может иметь место и в том случае, когда другие величины отклоняются от равновесных зна-

чений. Температура  $T$ , входящая в формулу (35), теряет тогда свой строгий смысл и заменяется так называемой кинетической температурой. Могут быть и еще большие отклонения от равновесия. Часто оказывается (например, в газовых разрядах при низких давлениях), что электроны, с одной стороны, и тяжелые частицы, с другой, описываются распределениями Максвелла с различными кинетическими температурами. В этом случае говорят о температуре электронов  $T_e$  и температуре газа  $T_g$ .

Распределение Максвелла для электронного газа довольно устойчиво, поскольку обмен энергией между электронами происходит очень интенсивно. Колебания плазмы и другие коллективные эффекты могут усилить этот обмен энергией [8].

### 5. ФОРМУЛА БОЛЬЦМАНА

Если в  $1 \text{ см}^3$  плазмы имеется  $n$  одинаковых атомов, то часть их может находиться в возбужденном состоянии. В термодинамическом равновесии или в ЛТР доля  $n_i$  атомов, находящихся на  $i$ -м квантовом уровне с энергией  $E_i$ , дается формулой Больцмана

$$\frac{n_i}{n} = \frac{g_i}{U(T)} \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right). \quad (36)$$

Здесь  $g_i$  — статистический вес  $i$ -го уровня. Статистическая сумма  $U(T)$  определяется как

$$U(T) = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right). \quad (37)$$

Суммирование должно проводиться по всем уровням вплоть до самого высокого. Уровни, очень близкие к границе ионизации  $\chi$ , не реализуются, потому что квантовые орбиты высоковозбужденных энергетических состояний возмущаются окружающими частицами. (Диаметр орбит вблизи границы ионизации возрастает как квадрат главного квантового числа.) Энергия последнего уровня, который необходимо учитывать, равна

$$E_j = \chi - \Delta\chi. \quad (38)$$

Расчет величины  $\Delta\chi$ , которая в основном является функцией плотности возмущающих частиц, обсуждается в п. 8, посвященном поправкам на плотность.

Полезно относить число  $n$  ко всем частицам данной степени ионизации. Таким образом, получаем единую формулу Больцмана для определенной степени ионизации каждого элемента в плазме.

Статистические веса находят по квантовому числу полного углового момента  $J_i$  с помощью известного соотношения

$$g_i = 2J_i + 1. \quad (39)$$

(Оно справедливо, если заселенности относят к «уровню»; см. Грим [4], Унзольд [1] или другие астрофизические учебники.)

В таблицах Мур [9] можно найти величины  $J_i$  и  $E_i$  для всех элементов и почти всех степеней ионизации. В них энергии квантовых уровней даны в  $\text{см}^{-1}$ . Для практических приложений имеем расчетную формулу

$$\frac{E_i}{kT} = 1,4388 \frac{E_i [\text{см}^{-1}]}{T [^\circ\text{K}]}. \quad (40)$$

Обсуждение статистических сумм молекул можно найти, например, в [10, 11].

## 6. ФОРМУЛА САХА

При сравнении заселенностей двух последовательных ступеней ионизации применение формулы Больцмана к ионизованным атомам приводит к формуле для отношения числа частиц на  $(z-1)$ -ступени  $n_{z-1}$  к числу частиц на  $z$ -ступени  $n_z$ . Значение  $z=1$  соответствует нейтральному атому,  $z=2$  — однократно ионизованному атому и т. д. <sup>1)</sup> Формула для отношения числа частиц, находящихся на разных ступенях ионизации, называется формулой Саха:

$$n_e \frac{n_z}{n_{z-1}} = S_{z-1}(T) = 2 \frac{U_z(T)}{U_{z-1}(T)} \frac{(2\pi m_0 k T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_{z-1} - \Delta\chi_{z-1}}{kT}\right). \quad (41)$$

Здесь снова  $n_{z-1}$ ,  $n_z$  — плотности частиц,  $n_e$  — плотность электронов (число свободных электронов в  $1 \text{ см}^3$ ), в которую включен каждый электрон безотносительно к его происхождению. Функции  $U_z(T)$ ,  $U_{z-1}(T)$  суть статистические суммы (37), которые соответствуют двум ступеням ионизации,  $m_0$  — масса покоя электрона. Снижение потенциала ионизации  $\Delta\chi_{z-1}$  обсуждается ниже. Для практических приложений, когда энергия ионизации дается в  $\text{см}^{-1}$ , имеем

$$\frac{n_e n_z}{n_{z-1}} \frac{U_z(T)}{U_{z-1}(T)} 4,83 \cdot 10^{15} T^{3/2} \exp\left(-1,4388 \frac{\chi_{z-1} - \Delta\chi_{z-1}}{T}\right). \quad (42)$$

Если  $\chi_{z-1}$  выражено в эв, то показатель экспоненты в (42) равен

$$-1,1605 \cdot 10^4 \frac{\chi_{z-1} - \Delta\chi_{z-1}}{T \text{ } ^\circ\text{K}}.$$

## 7. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Для плазмы низкой плотности хорошо выполняется уравнение состояния идеального газа. В физике плазмы это уравнение записывают для единичного объема:

$$p = kT \left( n_e + \sum_{s,z} n_{s,z-1} \right)^2, \quad (43)$$

где  $p$  — полное давление в  $\text{дин/см}^2$ , если  $n$  в  $\text{см}^{-3}$  и  $k$  — в  $\text{эрг/град}$  ( $1 \text{ атм} = 1,0132 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$ ). Суммирование в правой части проводится по всем ступеням ионизации  $z$  и по всем элементам  $s$ , присутствующим в плазме. Если вместо плотностей частиц ввести давление электронов и давление частиц

$$p_e = n_e kT, \quad p_{s,z-1} = n_{s,z-1} kT, \quad (44)$$

то из (43) получим

$$p = p_e + \sum_{s,z} p_{s,z-1}. \quad (45)$$

Эта формула иногда оказывается удобной при расчете плотностей частиц в плазме в зависимости от полного давления и температуры.

Отклонения уравнения состояния от (43) или (45), которые имеют место при больших плотностях электронов, обсуждаются Гримом [12].

<sup>1)</sup> Величина  $z$  — число электронных зарядов, которые «видит» излучающий электрон. Следовательно,  $z-1$  дает величину заряда атома или иона. Это соответствует обозначениям Грима [4].

<sup>2)</sup> Суммирование по  $z$  начинается с  $z=1$ ; если же имеются отрицательные ионы, то с  $z=0$ !

## 8. СНИЖЕНИЕ ЭНЕРГИИ ИОНИЗАЦИИ

Снижение энергии ионизации  $\Delta\chi_{z-1}$ , которое необходимо знать для расчета статистических сумм и применения формулы Саха, рассматривалось многими авторами, но удовлетворительного решения этой проблемы до сих пор не найдено. Экспериментальный путь решения этой проблемы представляется безуспешным, потому что точность спектроскопических измерений слишком низка для наблюдения таких относительно малых эффектов. С другой стороны, точное вычисление  $\Delta\chi_{z-1}$  несущественно для целей спектроскопии плазмы.

Одним из первых эту проблему исследовал Унзольд [13], который рассматривал возмущение иона ближайшим соседним ионом. Он получил следующее выражение для  $\Delta\chi_{z-1}$ :

$$\Delta\chi_{z-1} = 3z^{2/3} \frac{e_0^2}{\bar{r}_e}, \quad (46)$$

где

$$\bar{r}_e = \left( \frac{4}{3} \pi n_e \right)^{-1/3} \quad (47)$$

есть среднее межэлектронное расстояние. Для плазмы, в которой имеются только однократно ионизованные частицы ( $z=1$ ),

$$\Delta\chi_0 = 6,9 \cdot 10^{-7} n_e^{1/3} \text{ эв}, \quad (48)$$

если  $n_e$  выражено в  $\text{см}^{-3}$ .

По сравнению со всеми другими теориями расчет по формуле Унзольда дает самое сильное снижение энергии ионизации.

Другие рассмотрения основываются на термодинамических соображениях (см., например, [14, 15]). Они приводят к следующему выражению:

$$[\Delta\chi_{z-1} = z \frac{e_0^2}{\rho_D}]. \quad (49)$$

Здесь  $\rho_D$  — дебаевский радиус экранирования:

$$\rho_D = \frac{1}{e_0} \sqrt{\frac{kT}{n_e + \sum_{s,z} (z-1)^2 n_{s,z-1}}}. \quad (50)$$

Формула (49) справедлива, если плотности заряженных частиц меньше критической величины  $n_{кр}$  [14], которая почти никогда не достигается в лабораторных плазмах. Для плазмы с однократно ионизованными частицами из (49) и (50) получаем

$$\Delta\chi_0 = 2,9 \cdot 10^{-8} \sqrt{\frac{n_e}{T}} \text{ эв}; \quad (51)$$

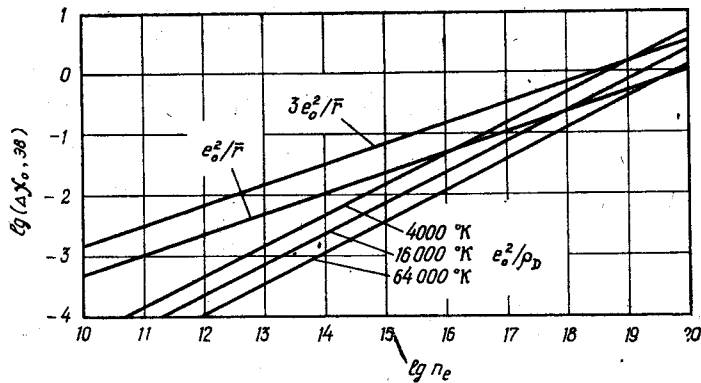
здесь  $n_e$  выражено в  $\text{см}^{-3}$ ,  $T$  — в  $^\circ\text{К}$  (фиг. 1.7). В некоторых работах (например, в [16])  $\Delta\chi$  представляют в виде суммы «поляризационного члена»  $e_0^2/\rho_D$  и «решеточного члена»  $e_0^2/\bar{r}_e$

$$\Delta\chi_0 = c_1 \frac{e_0^2}{\bar{r}_e} + c_2 \frac{e_0^2}{\rho_D}, \quad (52)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — константы порядка единицы.

Недавно Эккер и Кроль [17] провели новый анализ проблемы уменьшения энергии ионизации нейтрального водорода. Они нашли, что величина  $\Delta\chi_0$ , которую следует подставлять в формулу Саха, дается выражением

$$\Delta\chi_0 = 1,4 \frac{e_0^2}{\rho_D} \text{ (Саха)}, \quad (53)$$



Ф и г. 1.7. Снижение энергии ионизации (по различным теориям).

тогда как для расчета статистической суммы следует использовать выражение

$$\Delta\chi_0 = \frac{e_0^3}{r_+} \quad (\text{статистическая сумма}). \quad (54)$$

Среднее межионное расстояние  $\bar{r}_+$  совпадает с  $\bar{r}_e$  (47) в том случае, если имеются только однократно ионизованные атомы. Грим [12, 15] предлагает использовать формулу (49) для  $\Delta\chi_{z-1}$  как в формуле Саха, так и для расчета статистической суммы.

### 9. РАСЧЕТ ПЛОТНОСТЕЙ ЧАСТИЦ В СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ

При расчете излучения горячих газов основная проблема состоит в определении плотностей частиц.

Если в плазме присутствуют различные элементы, то концентрации можно выразить в виде

$$c_s = \frac{\sum_{s,z} n_{s,z-1}}{\sum_{s,z} n_{s,z-1}}. \quad (55)$$

Кроме того, имеется уравнение состояния (43) и уравнение квазинейтральности плазмы:

$$n_e = \sum_{s,z} (z-1) n_{s,z-1}. \quad (56)$$

Оно выполняется почти во всех плазмах, особенно в условиях равновесия. К указанной выше системе уравнений добавляются формулы Саха для всех сортов ионов

$$\frac{n_{s,z} n_e}{n_{s,z-1}} = S_{s,z-1}(T, n_e). \quad (57)$$

Зависимость от  $n_e$  в правой части уравнения (57) обусловлена введением в показатель экспоненты  $\chi_{z-1}/kT$  и в статистические суммы снижения энергии ионизации  $\Delta\chi_{z-1}(n_e)$ . Полную систему уравнений лучше всего решать на ЭВМ. Если температура и плотность электронов задаются как параметры, то задача является простой. Если заданы температура и давление, то подставляют оценочное значение  $n_e$  в формулы Саха, решают систему и вновь подставляют улучшенное значение  $n_e$  в  $S_{s,z-1}(T, n_e)$ . Эта процедура схо-

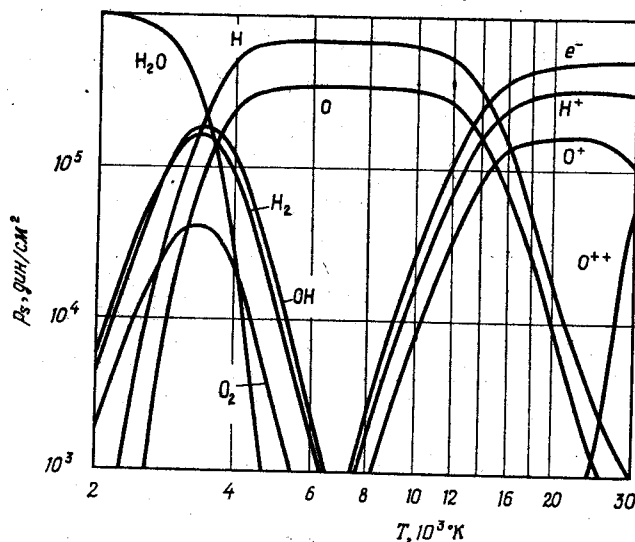
дится очень быстро. В результате такого расчета получаем

$$\left. \begin{aligned} n_{e, z-1} &= n_{e, z-1}(T, n_e, c_1, c_2, \dots) \\ p &= p(T, n_e, c_1, c_2, \dots) \end{aligned} \right\} \text{ для данных } T \text{ и } n_e, \quad (58)$$

или

$$\left. \begin{aligned} n_{e, z-1} &= n_{e, z-1}(T, p, c_1, c_2, \dots) \\ n_e &= n_e(T, p, c_1, c_2, \dots) \end{aligned} \right\} \text{ для данных } T \text{ и } p. \quad (59)$$

Формулы для парциальных давлений  $p_{s, z-1}$ , и  $p_e$  получаются при умножении (58) и (59) на  $kT$  (фиг. 1.8).



Ф и г. 1.8. Парциальные давления компонент в плазме  $\text{H}_2\text{O}$  при атмосферном давлении в зависимости от температуры (Бурхори и Винке [18]).

## 10. РАСЧЕТ СТАТИСТИЧЕСКИХ СУММ

Тот факт, что суммирование по всем энергетическим уровням проводится вплоть до уменьшенного потенциала ионизации, оказывается малосущественным; впрочем, в большинстве случаев точное суммирование оказывается невозможным, поскольку не все высшие энергетические уровни имеются в таблицах [9]. Практически в статистическую сумму заметный вклад вносят основное состояние, несколько уровней, лежащих как раз над основным состоянием, и большое число уровней вблизи границы ионизации.

Удобно разделить статистические суммы на три составляющие:

- статистический вес основного состояния  $g_1$ ;
- сумма, которая включает все низколежащие уровни;
- часть, в которой проводится суммирование сильно возбужденных водородоподобных уровней вплоть до уменьшенной границы ионизации.

Последний член можно преобразовать в элементарный интеграл, если подставить для энергий уровней водородоподобные значения. Таким образом, имеем

$$U_{z-1}(T, n_e) = g_1 + \sum_{i=2}^{i=m} g_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) + \frac{2}{3} g_{z,1} \left(\frac{z^2 \chi_H}{\Delta \chi_{z-1}}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_{z-1}}{kT}\right). \quad (60)$$



Здесь  $\chi_H = 13,59$  эв — энергия ионизации атома водорода, и  $g_{z, 1}$  — статистический вес основного состояния иона.

Для расчета второго члена формулы (60) рекомендуется метод, который разработали Травинг и др. [19] и Шлендер и Травинг [20]. Травинг уменьшает число членов в сумме, вводя несколько эквивалентных уровней и статистических весов.

Третий член в правой части (60) должен быть обобщен, если система уровней атома основывается на различных квантовых уровнях исходного иона. В этом случае третий член в (60) принимает вид

$$\frac{2}{3} \left( \frac{z^2 \chi_H}{\Delta \chi_{z-1}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\chi_{z-1}}{kT} \right\} \sum_k g_{z, k} \exp \left( -\frac{E_{z, k}}{kT} \right). \quad (61)$$

Следует отметить, что во многих случаях статистический вес основного состояния  $g_1$  является достаточно хорошим приближением для статистической суммы.

## § 4. ПОГЛОЩЕНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

### 1. ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ

Интенсивности линий поглощения и испускания определяются соответственно заселенностью нижнего или верхнего уровня и коэффициентами Эйнштейна. В соответствии с тремя процессами, а именно поглощением, индуцированным излучением и спонтанным излучением, имеются три вероятности переходов, которые описывают процессы излучения и поглощения фотона.

Припишем верхнему уровню индекс  $k$ ; обозначим энергию этого уровня через  $E_k$ ; пусть нижний уровень имеет индекс  $i$ . Число актов поглощения (в 1 сек и в 1 см<sup>3</sup>), происходящих в линии под влиянием поля излучения с плотностью излучения  $u_\nu$ , дается выражением

$$\mathcal{N}_{ik} = n_i u_\nu B_{ik}. \quad (62)$$

Здесь  $n_i$  — плотность атомов, находящихся на нижнем уровне  $i$ ,  $B_{ik}$  — коэффициент Эйнштейна для поглощения, который определяется этим соотношением. Число актов излучения (переходов с  $k$  на  $i$ ), происходящих в 1 сек и в 1 см<sup>3</sup>, определится равенством

$$\mathcal{N}_{ki} = n_k A_{ki} + n_k u_\nu B_{ki}. \quad (63)$$

Здесь  $A_{ki}$  — вероятность перехода (коэффициент Эйнштейна) для спонтанного излучения,  $n_k$  — заселенность верхнего уровня,  $B_{ki}$  — вероятность перехода для индуцированного (вынужденного) излучения<sup>1)</sup>. В обеих формулах плотность излучения полагается постоянной в пределах линии.

Спонтанно испущенные фотоны обычно имеют изотропное распределение (по направлениям). Направление же и фаза индуцированного фотона совпадают с направлением и фазой индуцирующего фотона.

Используя принцип детального равновесия, можно получить соотношение между тремя вероятностями переходов<sup>2)</sup>. Если газ находится в полости, где имеется равновесное излучение, то  $\mathcal{N}_{ik} = \mathcal{N}_{ki}$  и из (62) и (63) получаем

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 [\exp(h\nu/kT) - 1]} = \frac{n_k A_{ki}}{n_i B_{ik} - n_k B_{ki}}. \quad (64)$$

<sup>1)</sup> Иногда вероятности переходов  $B_{ik}$  и  $B_{ki}$  связывают с интенсивностью излучения  $I_\nu$  (Милл). Тогда  $B_{\text{Эйнштейн}} = (c_0/4\pi) \times B_{\text{Милл}}$ .

<sup>2)</sup> В 1917 г. Эйнштейн, используя принцип детального равновесия, доказал существование индуцированного излучения.

Если для  $n_i/n_k$  использовать формулу Больдмана (36) и заменить  $(E_k - E_i)$  на  $h\nu$ , то, сравнивая обе части этого уравнения, можно получить следующие соотношения:

$$A_{ki} = \frac{g_i}{g_k} B_{ik} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \quad g_k B_{ki} = g_i B_{ik}. \quad (65)$$

Вместо вероятностей переходов часто используют силу осциллятора или, точнее, силу осциллятора при поглощении  $f = f_{ik}$ . [Она связана с  $B_{ik}$  следующим образом<sup>1)</sup>]:

$$f = f_{ik} = \frac{m_0 h \nu}{\pi e_0^2} B_{ik}. \quad (66)$$

Определение величины  $f$  дано ниже [см. формулу (75)].

Наряду с коэффициентами Эйнштейна и силой осциллятора для описания интенсивности спектральных линий используется термин «сила линии»  $S_{ik}$ . Выражение для  $S_{ik}$  получается непосредственно из квантовомеханических расчетов [см. (68)]. Вероятность перехода  $A_{ki}$  и сила линии  $S_{ik}$  связаны следующим соотношением:

$$A_{ki} = \frac{64\pi^4}{3h\lambda^3 g_k} S_{ik}, \quad S_{ik} = S_{ki}. \quad (67)$$

Сила линии  $S_{ik}$  имеет размерность квадрата дипольного момента и часто выражается в единицах  $e_0^2 a_0^2$  (единицы Хартри), где  $a_0$  — боровский радиус. Величина  $e_0^2 a_0^2$  в системе СГС равна  $6,46 \cdot 10^{-36}$  ед. СГС.

Взаимное преобразование пяти величин  $A_{ki}$ ,  $B_{ki}$ ,  $B_{ik}$ ,  $f$ ,  $S_{ik}$  (зачастую необходимое) легко выполняется, если использовать переводные коэффициенты, приведенные в табл. 1.1

Таблица 1.1

Коэффициенты преобразований

$A_{ki} =$	—	$1,67 \cdot 10^{-25} \frac{B_{ki}}{\lambda^3}$	$1,67 \cdot 10^{-25} \frac{g_i}{g_k} \frac{B_{ik}}{\lambda^3}$	$6,67 \cdot 10^{-1} \frac{g_i}{g_k} \frac{f_{ik}}{\lambda^2}$	$3,14 \cdot 10^{29} \frac{1}{g_k} \frac{S_{ik}}{\lambda^3}$
$B_{ki} =$	$6,01 \cdot 10^{24} \lambda^3 A_{ki}$	—	$\frac{g_i}{g_k} B_{ik}$	$4,01 \cdot 10^{24} \frac{g_i}{g_k} \lambda f_{ik}$	$1,88 \cdot 10^{54} \frac{1}{g_k} S_{ki}$
$B_{ik} =$	$6,01 \cdot 10^{24} \frac{g_k}{g_i} \lambda^3 A_{ki}$	$\frac{g_k}{g_i} B_{ki}$	—	$4,01 \cdot 10^{24} \lambda f_{ik}$	$1,88 \cdot 10^{54} \frac{1}{g_i} S_{ik}$
$f_{ik} =$	$1,50 \frac{g_k}{g_i} \lambda^2 A_{ki}$	$2,50 \cdot 10^{-25} \frac{g_k}{g_i} \frac{B_{ki}}{\lambda}$	$2,50 \cdot 10^{-25} \frac{B_{ik}}{\lambda}$	—	$4,70 \cdot 10^{29} \frac{1}{g_i} S_{ik}$
$S_{ik} =$	$3,19 \cdot 10^{-30} g_k \lambda^3 A_{ki}$	$5,31 \cdot 10^{-55} g_k B_{ki}$	$5,31 \cdot 10^{-55} g_i B_{ik}$	$2,13 \cdot 10^{-30} g_i \lambda f_{ik}$	—

Индексом  $k$  обозначен верхний уровень, индексом  $i$  — нижний;  $\lambda$  выражено в см,  $A_{ki}$  — в сек<sup>-1</sup>,  $B_{ki}$  и  $B_{ik}$  — в см/г,  $S_{ik}$  — в дин·см<sup>4</sup>.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДОВ

Для расчета интенсивности линий, излучаемых плазмой, и, наоборот, для спектроскопической диагностики плазмы, совершенно необходимо знать вероятности переходов для всех исследуемых линий. Имеется два способа нахождения вероятностей переходов: квантовомеханическое вычисление и прямое измерение. При использовании обоих этих методов приходится сталкиваться со значительными и, частично, еще неразрешенными трудностями.

<sup>1)</sup> Сила осциллятора при излучении  $f_{ki} = -f_{ik} g_i / g_k$  используется очень редко!

Квантовомеханический расчет приводит к следующему выражению для силы линий:

$$S_{ik} = \sum_{m, m'} |r_{m, m'}|^2, \quad (68)$$

где

$$r_{m, m'} = \int \psi_{i, m}^* \sum_j r_j \psi_{k, m'} d\tau, \quad (69)$$

$\psi_{i, m}$ ,  $\psi_{k, m'}$  — собственные функции подуровней начального и конечного состояний. Сумма по  $j$  обозначает сумму по всем электронам, участвующим в переходе.

Проблема определения вероятностей переходов сводится, в конце концов, к вычислению собственных функций, с помощью которых легко определить матричные элементы. Точные значения вероятностей переходов таким образом можно рассчитать только для одноэлектронных систем (H, He<sup>+</sup>, Li<sup>++</sup>, ...) (см. по этому поводу Бете и Солпитер [21]). Системы с большим числом электронов можно рассмотреть только с помощью приближенных квантовомеханических методов. Эти приближенные методы делятся на две группы. Более строгие методы — метод Хартри, метод Хартри — Фока и другие (см. Хартри [22]) — в принципе применимы к любым спектрам. Они требуют, однако, выполнения большого объема вычислительной работы, который с увеличением числа электронов становится непомерно большим. К настоящему времени вычисления проведены лишь для относительно простых электронных конфигураций. Наилучшие результаты получили Трефтц и др. [23], а также Шифф и Пекерис [24] для гелия. Точность этих расчетов, по-видимому, гораздо лучше 5%. Однако все эти методы имеют общий недостаток: нельзя сделать надежного заключения о точности получаемых результатов.

Менее точные методы используются для расчетов вероятностей переходов одного (валентного) электрона в кулоновском поле. Здесь особенно следует отметить полуэмпирический метод Бейтса и Дамгаард [25]. Для расчета радиальных собственных функций в водородоподобной модели атома используются известные (из эксперимента) значения энергий обоих уровней рассматриваемого перехода. Бейтс и Дамгаард протабулировали матричные элементы как функции эффективных главных квантовых чисел, которые находятся из энергий уровней. С помощью этих таблиц можно легко и быстро рассчитать вероятности переходов. Грим [4, 26] опубликовал данные по вероятностям переходов, рассчитанных с помощью вышеуказанного метода. Точность метода Бейтса и Дамгаард часто оказывается удивительно высокой, особенно для  $p-d$  и  $d-f$ -переходов.

Весьма полное обсуждение приближенных квантовомеханических методов дано в книгах или статьях Слэтера [27], Хартри [22] и Кондона и Шортли [28]; более краткие обзоры можно найти в книгах Унзольда [1] и Грима [4].

Вторую возможность определения вероятностей переходов дает эксперимент. Мы не можем здесь рассмотреть все методы измерений, предложенные и использованные на протяжении последних 50 лет. Вероятность перехода определяется либо путем измерения интенсивности излучения или поглощения [см. (73), (80)], либо по измерению среднего времени жизни  $\tau$  верхнего уровня для рассматриваемой линии ( $1/\tau = \sum_i A_{ki}$ ). Зная относительные интенсивности всех линий, которые дают вклад в среднее время жизни, можно из него получить требуемую величину  $A_{ki}$ . Экспериментальные трудности всех методов, основанных на измерении абсолютных интенсивностей, заключаются в определении плотности частиц  $n_i$  или  $n_k$ , которые редко измеряются с точностью, превосходящей 5%.

Часто оказывается возможным измерить относительные вероятности переходов для большого числа линий элемента, находящегося на определенной ступени ионизации.

Методы определения среднего времени жизни позволяют избежать трудностей, связанных с измерением абсолютных значений плотности частиц, поскольку для нахождения  $A_{ki}$  достаточно знания относительного спада интенсивности излучения со временем. Они обладают, однако, тем недостатком, что таким способом можно исследовать только несколько энергетических уровней атома.

Комбинация обоих методов — метода измерения интенсивности линии и метода измерения среднего времени жизни — является, конечно, наилучшим способом для получения вероятностей переходов, измеренных с хорошей точностью. Приближенные квантовомеханические методы, с одной стороны, и экспериментальные данные — с другой, очень хорошо дополняют друг друга. В случае простых спектров квантовомеханические методы по точности превосходят экспериментальные методы. Чем сложнее становятся спектры, тем сложнее и ненадежнее расчеты, так что преимущество переходит к измеренным величинам.

Почти полная библиография всех статей, касающихся определения вероятностей переходов, опубликована Национальным бюро стандартов в Вашингтоне (Гленнон и Визе [29]). Это издание (с помощью дополнений оно поддерживается на современном уровне) совершенно необходимо в тех случаях, когда требуется узнать вероятности переходов. В [30] приведены данные (с критическим анализом) для элементов H, Li, Be, B, C, N, O, F и Ne.

### 3. КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Определение коэффициента поглощения было дано в § 3 [см. (34)]. В окрестности линии он складывается, вообще говоря, из непрерывной компоненты  $\kappa_C(\nu)$  и дискретной компоненты  $\kappa_L(\nu)$  (см. фиг. 1.3). Таким образом, в пределах линии имеем

$$\kappa(\nu) = \kappa_L(\nu) + \kappa_C(\nu). \quad (70)$$

Сейчас мы детально проанализируем коэффициент поглощения в линии  $\kappa_L(\nu)$ .

Если  $\kappa_L(\nu)$  разделить на плотность атомов, находящихся на нижнем уровне  $n_i$ , то получится атомный коэффициент поглощения

$$\sigma_L(\nu) = \frac{\kappa_L(\nu)}{n_i}. \quad (71)$$

Величина  $\sigma_L(\nu)$  имеет размерность площади и представляет собой эффективное сечение поглощения фотона с энергией  $h\nu$ . Эффективное сечение  $\sigma_L(\nu)$  и коэффициент поглощения  $\kappa_L(\nu)$  сильно зависят от частоты, потому что поглощение в линии является типичным резонансным эффектом. Эта зависимость описывается профилем линии  $P_\nu$ . Профиль линии нормирован следующим образом:

$$\int_{\text{Линия}} P_\nu d\nu = 1. \quad (72)$$

Если использовать шкалу длин волн, то можно ввести нормированный профиль  $P_\lambda$ , который связан с  $P_\nu$  соотношением  $P_\lambda = P_\nu \nu^2 / c_0$ . При теоретическом анализе предпочитают иметь дело с профилем  $P_\omega$ :  $P_\omega = P_\nu / 2\pi$ . Расчет формы линии обсуждается Травингом в гл. 2.

Если принять, что верхний уровень  $k$  не заселен, то абсолютная величина  $\kappa_L(\nu)$  найдется из соотношения Ладенбурга

$$\int_{\text{Линия}} \kappa_L(\nu) d\nu = \frac{h\nu}{c_0} n_i B_{ik}. \quad (73)$$

Эту формулу можно легко получить, сравнив поглощенную энергию

$$I_\nu \kappa_L(\nu) \Delta x \Delta \Omega \Delta A \Delta \nu \text{ с } B_{ik} u_\nu (n_i \Delta x \Delta A) h\nu.$$

Из (72) и (73) сразу получаем формулу для коэффициента поглощения в линии

$$\kappa_L(\nu) = \frac{h\nu}{c_0} n_i B_{ik} P_\nu. \quad (74)$$

Классическая теория вместо (73) приводит к выражению

$$\int_{\text{Линия}} \kappa_L(\nu) d\nu = \frac{\pi e_0^2}{m_0 c_0} n_i f. \quad (75)$$

Здесь  $f$  — сила осциллятора при поглощении или просто сила осциллятора, упоминавшаяся в связи с формулой (66) [последняя следует прямо из (73) и (75)]. Сила осциллятора  $f$  есть безразмерная величина, которая определяется как «число классических осцилляторов на атом» в нижнем состоянии  $i$ . Согласно этому определению, она меньше или равна единице. С другой стороны, измерения и расчеты показывают, что значения  $f$  могут иногда превосходить единицу. Но даже сегодня при описании процесса поглощения термину «сила осциллятора» отдается предпочтение по сравнению с вероятностью перехода.

Если на верхнем уровне имеется некоторое число атомов (что может быть достигнуто, например, путем повышения температуры газа), то имеет место индуцированное излучение. Обычно вклад индуцированного излучения учитывается в коэффициенте поглощения. Это удобно, поскольку индуцированное излучение имеет ту же частоту и направление, что и падающее излучение, и, таким образом, оно может рассматриваться как отрицательное поглощение. Тогда выражение для коэффициента поглощения приобретает следующий вид:

$$\kappa'_L(\nu) = \frac{h\nu}{c_0} P_\nu (n_i B_{ik} - n_k B_{ki}) = \kappa_L(\nu) \left( 1 - \frac{n_k B_{ki}}{n_i B_{ik}} \right). \quad (76)$$

Приведенная формула справедлива только в том случае, когда профили линии поглощения и индуцированного излучения совпадают. Это имеет место, если возбуждение всех подуровней оказывается «естественным», т. е. пропорциональным их статистическим весам (столкновительное возбуждение или возбуждение белым светом; см. § 7).

С учетом формулы (65), которая связывает  $B_{ik}$  и  $B_{ki}$ , получаем выражение для коэффициента поглощения в общем виде

$$\kappa'_L(\nu) = \frac{h\nu}{c_0} B_{ik} n_i P_\nu^a \left( 1 - \frac{g_i n_k P_\nu^{ie}}{g_k n_i P_\nu^a} \right). \quad (77)$$

Если в ЛТР-плазме преобладающую роль играют столкновения, то профиль линии индуцированного излучения  $P_\nu^{ie}$  совпадает с профилем линии поглощения  $P_\nu^a$ . В этом случае справедлива формула (76) и отношение плотностей частиц можно заменить болцмановским множителем  $\exp(-h\nu/kT)$ , т. е.

$$\kappa'_L(\nu) = \kappa_L(\nu) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right]. \quad (78)$$

В термодинамическом равновесии и в ЛТР величина  $T$  является температурой. Если же плазма не находится в состоянии ЛТР,  $T$  можно определить

как «температуру возбуждения» (см. § 6). В виновской области, когда  $h\nu/kT > 1$  или  $\lambda T < 0,48$  см·град, индуцированным излучением можно пренебречь:  $\kappa_L(\nu) = \kappa_L(\nu)$ .

#### 4. КОЭФФИЦИЕНТ ИСПУСКАНИЯ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

Так же как коэффициент поглощения и интенсивность, коэффициент испускания  $\epsilon_\nu$  [определяемый формулой (27)] можно разделить на непрерывную и дискретную компоненты:

$$\epsilon_\nu = \epsilon_{\nu, c} + \epsilon_{\nu, L}. \quad (79)$$

Коэффициент  $\epsilon_{\nu, L}$  включает спонтанно изученную энергию в пределах линии. Энергия, излучаемая в 1 сек и в 1 см<sup>3</sup> в пределах линии, в соответствии с (63) равна  $h\nu A_{ki} n_k$ . Поделив это выражение на  $4\pi$ , получим полный коэффициент испускания в линии:

$$\epsilon_L = \int_{\text{Линия}} \epsilon_{\nu, L} d\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ki} n_k. \quad (80)$$

Подстановка нормированного профиля линии  $P_\nu$  приводит к выражению

$$\epsilon_{\nu, L} = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ki} n_k P_\nu, \quad (81)$$

или

$$\epsilon_{\nu, L} = \frac{2\pi e^2 \nu^2 h}{m_0 c^3} f \frac{g_i}{g_k} n_k P_\nu. \quad (82)$$

В равновесии и в ЛТР профили линии для поглощения, индуцированного испускания и спонтанного испускания одинаковы. Это следует из закона Кирхгофа. В неравновесной плазме профили совпадают, если возбуждение обоих уровней «естественное», т. е., скажем, когда возбуждение происходит в результате неупругих столкновений или под действием излучения, интенсивность которого постоянна в пределах линии. Отклонения от равенства трех профилей линии будут кратко обсуждаться в § 7.

## § 5. ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ В СПЛОШНОМ СПЕКТРЕ

### 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Сплошной спектр излучения или поглощения образуется в тех случаях, когда по крайней мере одно из квантовых состояний является свободным состоянием, энергия которого лежит в континууме разрешенных значений. При слиянии неразрешенных линий или линий, которые близки друг к другу и очень широки, могут образоваться кажущиеся континуумы. Здесь они не будут рассматриваться.

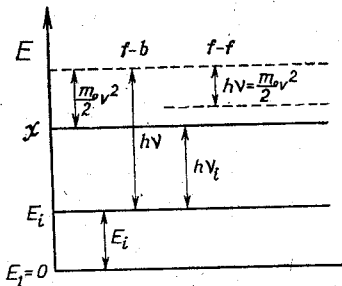
Наиболее важными для спектроскопии плазмы являются рекомбинационные континуумы и континуумы, обусловленные тормозным излучением. Рекомбинационный излучательный континуум возникает, когда ион захватывает свободный электрон. Он может наблюдаться также и при поглощении. Этот (обратный) процесс называется фотоионизацией. Очень часто термин «связанно-свободный континуум» (*bf*) используют вместо термина «рекомбинационный континуум».

Тормозное излучение (или поглощение) происходит, когда свободный электрон пролетает мимо положительного (или отрицательного) иона. Энергия излученного или поглощенного фотона отвечает разности энергий двух квантовых состояний иона и свободного электрона. В этом случае обычно используется термин «свободно-свободный континуум» (*ff*). Тормозное излучение иона на ионе или электрона на электроне гораздо меньше, чем тормозное излучение при пролете электрона мимо иона.

В этом параграфе рассматривается связанно-свободный континуум и дается только краткое описание свободно-свободного континуума. Молекулярные континуумы здесь не обсуждаются, потому что они играют незначительную роль в спектроскопии плазмы. Они рассматриваются в статье Финкельбурга и Петерса [31], в которой также детально рассматриваются атомные континуумы.

## 2. ПРОЦЕСС ФОТОИОНИЗАЦИИ

Атом или ион с зарядом  $(z - 1) e_0$  (для нейтрального атома  $z = 1$ ) при поглощении фотона может ионизоваться, если энергия фотона  $h\nu$  достаточно велика. Закон сохранения энергии в этом процессе приводит к следующему соотношению (фиг. 1.9):



$$h\nu = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \chi_{z-1} - E_i = \frac{1}{2} m_0 v^2 + h\nu_i. \quad (83)$$

Здесь  $v$  — скорость свободного электрона,  $E_i$  — энергия уровня, на котором находился ион перед поглощением,  $\nu_i$  — нижняя граница для частоты света, при которой может произойти фотопоглощение с уровня  $i$ . В непрерывном спектре частоты  $\nu_i$  указываются краями спектров поглощения или испускания.

Фиг. 1.9. Свободно-связанные и свободно-свободные переходы.

Атомное эффективное сечение рассматриваемого процесса есть сечение фотоионизации  $\sigma_{z-1, i}(\nu)$ . Оно зависит от частоты и обращается в нуль, если  $\nu < \nu_i$ . Закон сохранения энергии (83) справедлив также и для обратного процесса, т. е. для фоторекомбинации. Сечение захвата для фоторекомбинации можно обозначить через  $\sigma_{z, 1}(\nu)$ . Оба сечения связаны между собой формулой, выведенной Миллом:

$$\sigma_{z, 1}(\nu) = \frac{g_{z-1, i}}{g_{z, 1}} \frac{h^2 \nu^2}{m_0^2 c_0^2 \nu^2} \sigma_{z-1, i}(\nu). \quad (84)$$

Доказательство этого соотношения приведено ниже (см. стр. 33).

Квантовомеханический расчет (см., например, [32]) приводит к следующему выражению для сечения фотоионизации:

$$\sigma_{z-1, i}(\nu) = \frac{32\pi^4 e_0^2 m_0^2}{3h^3 c_0 g_{z-1, i}} \nu \sum_{m, m'} \left| \int \psi_{i, m} \sum_j r_j \psi_{1, m'} d\tau \right|^2. \quad (85)$$

Здесь  $m$  и  $m'$  — магнитные квантовые числа, уже введенные в (68). Сумма по  $j$  означает суммирование по всем электронам, участвующим в переходе (обычно один электрон). Волновая функция  $\psi_{1, m'}$  описывает ион в основном состоянии и свободный электрон.

Расчет матричных элементов в (85) представляет такие же трудности, как и расчет вероятностей переходов для спектральных линий (см. § 4). Кроме того, здесь, затруднено определение собственных волновых функций свободных состояний. Число точных расчетов сечений фотоионизации (методом Хартри — Фока) мало. Этот метод заслуживает внимания, если его применять только к расчету фотоионизации с основного состояния или с низколежащих возбужденных уровней. Для расчета фотоионизации с сильно возбужденных состояний удобный метод предложили Хэм [33] и Берджесс и Ситон [34]. Этот метод называется методом квантового дефекта, потому что собственные волновые функции свободных состояний получаются с помощью квантового дефекта серий термов. Для связанного состояния используются водородные собственные функции, так же как и в кулонов-

ском приближении Бейтса и Дамгаард [25] при расчете вероятностей переходов для спектральных линий.

Измерения сечений фотоионизации проведены практически только для атомов в основном состоянии; см. [35—38]. Сечения фотоионизации для возбужденных состояний можно получить из непрерывного спектра испускания или поглощения горячих газов в ближнем ультрафиолете или видимой области спектра, но в этом случае в фотоионизацию вносят вклад многочисленные возбужденные уровни, так что в результате получается сечение, усредненное по заселенностям возбужденных уровней.

Компилятивного обзора или библиографии по сечениям фотоионизации, охватывающих все теоретические и экспериментальные работы, не существует.

Согласно полуклассической теории, сечение фотоионизации для водородоподобных систем ( $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$ , ...) имеет вид [39, 40]

$$\sigma_n^{\text{кл}}(\nu) = C_1 \frac{z^4}{\nu^3 n^5}. \quad (86)$$

Здесь  $n$  — главное квантовое число,  $z$  — число электронных зарядов, которые «видит» излучающий электрон ( $\text{H}$ :  $z = 1$ ,  $\text{He}^+$ :  $z = 2$ , ...).

Постоянная  $C_1$  равна

$$C_1 = \frac{64\pi^4 m_0 e_0^{10}}{3 \sqrt{3} c_0 h^6} = 2,815 \cdot 10^{29} \text{ ед. СГС.}$$

Квантовомеханическая формула (85) дает значение  $\sigma(\nu)$ , которое лишь незначительно отличается от величины, определяемой по (86) (Гаунт [41], Карзас и Лэттер [42]). Следуя Гаунту, точный результат можно представить с помощью полуклассической формулы (86) и поправочного множителя — фактора Гаунта:

$$\sigma_{z-1, n}(\nu) = \sigma_n^{\text{кл}}(\nu) G_n(\nu). \quad (87)$$

Фактор Гаунта для водородоподобных ионов, рассчитанный в [42], приведен на фиг. 1.10.

Этот способ представления является обычным и практически удобным, даже если изучаются атомы более сложные, чем водородные. Если все уровни с одним и тем же главным квантовым числом близки друг к другу, т.е.  $E_i \approx E_n$ , то<sup>1)</sup>

$$\sum_i g_{z-1, i} \sigma_{z-1, i}(\nu) = g_{z-1, n} \sigma_n^{\text{кл}}(\nu) G_n(\nu), \quad (88)$$

где

$$g_{z-1, n} = \sum_i g_{z-1, i}. \quad (89)$$

Если приближение  $E_i \approx E_n$  выполняется недостаточно хорошо, то можно просуммировать по всем уровням с равными  $n$  и  $l$  (азимутальное квантовое число):

$$\sum_i g_{z-1, i} \sigma_{z-1, i}(\nu) = g_{z-1, n, l} \sigma_n^{\text{кл}}(\nu) G_{n, l}(\nu), \quad (90)$$

где

$$g_{z-1, n, l} = \sum_i g_{z-1, i}. \quad (91)$$

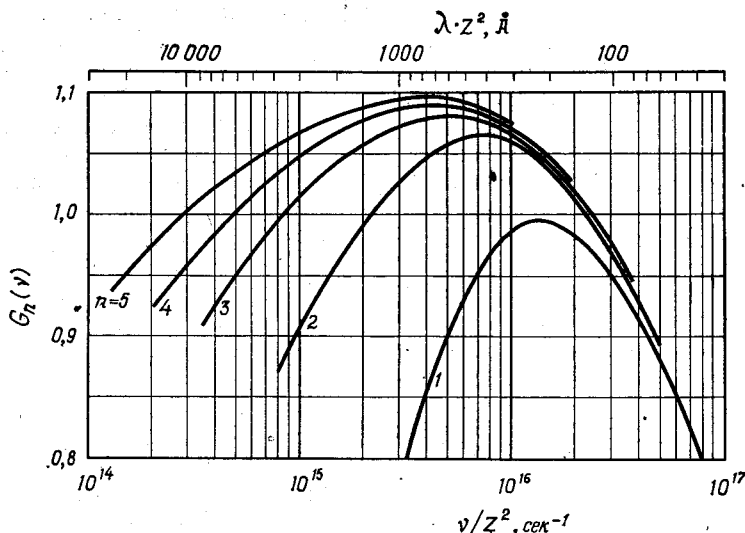
Суммы в (90) и (91) должны быть взяты по конфигурации  $(n, l)$ .

Таким путем можно получить факторы Гаунта для отдельных уровней:

$$\sigma_{z-1, i}(\nu) = \sigma_n^{\text{кл}}(\nu) G_i(\nu). \quad (92)$$

<sup>1)</sup> Энергии  $E_i$  следует считать достаточно близкими, если  $\Delta E_i/kT < 1$  для всех  $i$ .





Ф и г. 1.10. Факторы Гаунта свободно-связанных переходов для водородоподобных систем (Карзас и Лэттер [42]).

Даже для сложных атомов факторы Гаунта оказываются порядка единицы. Следовательно, представление сечения фотоионизации в виде произведения полуклассического члена и фактора  $G(v)$  является полезным.

Грим [4] вводит факторы Гаунта даже для  $E_i \neq E_n$ . В результате усреднения по распределению Больцмана они оказываются зависящими от температуры.

### 3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОГЛОЩЕНИЯ И ИСПУСКАНИЯ ДЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ СВОБОДНО-СВЯЗАННЫХ ПЕРЕХОДАХ

От коэффициентов  $\kappa_C^{bf}(v)$  и  $\varepsilon_{v,C}^{bf}$  — в дальнейшем они будут называться просто  $\kappa(v)$  и  $\varepsilon_v$  — можно легко перейти к сечениям  $\sigma_{z-1,i}(v)$  и  $\sigma_{z,i}(v)$ . Для процесса  $(z-1, i) \rightarrow (z, 1)$  коэффициент поглощения  $[\Delta\kappa(v)]$  на 1 см длины имеет вид

$$[\Delta\kappa(v)] = n_{z-1,i} \sigma_{z-1,i}(v). \quad (93)$$

Здесь  $n_{z-1,i}$  (см. § 3) — число ионов в 1 см<sup>3</sup> с зарядом  $(z-1)e_0$ , находящихся на  $i$ -м квантовом уровне. Для полного коэффициента поглощения ионами, находящимися на одной и той же ступени ионизации, получаем

$$\kappa(v) = \sum_i n_{z-1,i} \sigma_{z-1,i}(v). \quad (94)$$

Полный коэффициент поглощения плазмы при свободно-связанных переходах получается из этой формулы путем суммирования по  $z$  и по всем имеющимся элементам. Практически в  $\kappa(v)$  дают вклад только одна или две ступени ионизации.

Если заселенности возбужденных уровней  $E_i$  подчиняются распределению Больцмана (как, например, при ЛТР), то плотности  $n_{z-1,i}$  можно выразить через полное число ионов  $n_{z-1}$  и больцмановские множители. В результате имеем

$$\kappa(v) = \frac{n_{z-1}}{U_{z-1}} \sum_i g_{z-1,i} \sigma_{z-1,i}(v) \exp\left(-\frac{E_i}{kT_e}\right). \quad (95)$$

Здесь  $U_{z-1}$  — статистическая сумма иона. Если (95) разделить на  $n_{z-1}$ , то получим среднее сечение поглощения  $\bar{\sigma}_{z-1}$  на ион с зарядом  $(z-1)e_0$ . Эту величину можно использовать только при термодинамическом равновесии или в ЛТР. В астрофизической литературе, где сечение  $\bar{\sigma}_{z-1}(\nu)$  используется часто, оно обозначается через  $\kappa_{\nu}$ , атом.

В квантовой теории излучения в процессе фотоионизации необходимо учитывать индуцированное излучение (как это имеет место в случае анализа поглощения в спектральных линиях). Аналогично (77) имеем

$$\sigma'_{z-1, i}(\nu) = \sigma_{z-1, i}(\nu) \left( 1 - \frac{\Delta n_e g_{z-1, i}}{n_{z-1, i} \Delta g_e} \right). \quad (96)$$

Здесь  $\Delta n_e$  — число свободных электронов в энергетическом интервале  $\Delta E_{\text{кин}}$  и  $\Delta g_e$  — число квантовых состояний, отвечающих этому интервалу. В термодинамическом равновесии или в ЛТР снова применима формула Больцмана:

$$\frac{\Delta n_e}{n_{z-1, i}} = \frac{\Delta g_e}{g_{z-1, i}} \exp\left(-\frac{\chi_{z-1} + \frac{1}{2}m_0v^2 - E_i}{kT_e}\right) = \frac{\Delta g_e}{g_{z-1, i}} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right). \quad (97)$$

Тогда получаем

$$\sigma'(\nu) = \sigma(\nu) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right) \right] \quad \text{и} \quad \kappa'(\nu) = \kappa(\nu) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right) \right]. \quad (98)$$

Влияние индуцированного излучения обычно мало. При  $\lambda T_e \leq 0,48 \text{ см} \cdot \text{град}$  ошибка, обусловленная пренебрежением индуцированным излучением, меньше 5%.

Коэффициент испускания для рекомбинационного излучения зависит от функции распределения свободных электронов по скоростям  $F(v)$ . Скорость рекомбинации  $\Delta N_{z,1/z-1,i}$  в  $1 \text{ см}^3$  и в  $1 \text{ сек}$  в интервале скоростей от  $v$  до  $v + \Delta v$  имеет вид

$$\Delta N_{z, 1/z-1, i} = n_e n_{z, 1} F(v) \sigma_{z, 1}(v) v \Delta v. \quad (99)$$

Подставляя  $\Delta v = h \Delta \nu / m_0 v$  [см. (83)] и умножая на  $h\nu/4\pi$ , получаем следующее выражение для коэффициента испускания для процесса  $(z, 1) \rightarrow (z-1, i)$ :

$$\Delta \epsilon_{\nu} = n_e n_{z, 1} F(v) \frac{h^2 \nu}{4\pi m_0} \sigma_{z, 1}(v). \quad (100)$$

В термодинамическом равновесии число актов поглощения (93) равно числу актов испускания (100), если учитывается индуцированное испускание согласно (98):

$$n_{z-1, i} \sigma'_{z-1, i} B_{\nu}(T) = n_e n_{z, 1} F^*(v) \frac{h^2 \nu}{4\pi m_0} \sigma_{z, 1}(v). \quad (101)$$

Здесь  $F^*(v)$  — распределение Максвелла (35),  $B_{\nu}(T)$  — интенсивность излучения абсолютно черного тела (49). Используя формулы Больцмана и Саха, из (101) можно получить соотношение Милна (84) между сечениями  $\sigma_{z-1, i}(\nu)$  и  $\sigma_{z, 1}(\nu)$ .

Используя (84) и (101), получаем

$$\Delta \epsilon_{\nu} = n_e n_{z, 1} \frac{h^4 \nu^3}{4\pi m_0^3 c_0^2} \frac{F(v)}{v^2} \frac{g_{z-1, i}}{g_{z, 1}} \sigma_{z-1, i}(\nu). \quad (102)$$

Полный коэффициент испускания<sup>1</sup> для одной ступени ионизации имеет вид

$$\epsilon_{\nu} = n_e n_{z, 1} \frac{h^4 \nu^3}{4\pi m_0^3 c_0^2} \frac{F(v)}{v^2} \sum_i \frac{g_{z-1, i}}{g_{z, 1}} \sigma_{z-1, i}(\nu). \quad (103)$$

Если в (103) подставить максвелловское распределение для скоростей электронов и принять во внимание (83), то получим следующую формулу:

$$\varepsilon_\nu = C_2 \frac{n_e n_{z,1} \nu^3}{T_e^{3/2}} \exp\left(\frac{\chi_{z-1} - h\nu}{kT_e}\right) \sum_i \frac{g_{z-1,i}}{2g_{z,1}} \sigma_{z-1,i}(\nu) \exp\left(-\frac{E_i}{kT_e}\right). \quad (104)$$

Здесь

$$C_2 = \frac{2h^4}{c_0^3 (2\pi m_0 k)^{3/2}} = 6,106 \cdot 10^{-63} \text{ ед. СГС.}$$

Следует отметить, что, несмотря на наличие в этой формуле больцмановского множителя, она справедлива и в отсутствие термодинамического равновесия.

Подставляя фактор Гаунта  $G_n(\nu)$  и полуклассическое сечение в (95) и (104), а также используя соотношение

$$g_{z-1,n} = 2n^2 g_{z,1}, \quad (105)$$

получаем

$$\kappa(\nu) = C_1 \frac{n_{z-1} 2g_{z,1} z^4}{U_{z-1} \nu^3} \sum_n G_n(\nu) n^{-3} \exp\left(-\frac{E_n}{kT_e}\right), \quad (106)$$

$$\varepsilon_\nu = C_3 \frac{n_e n_{z,1} z^4}{T_e^{3/2}} \exp\left(\frac{\chi_{z-1} - h\nu}{kT_e}\right) \sum_n G_n(\nu) n^{-3} \exp\left(-\frac{E_n}{kT_e}\right), \quad (107)$$

где

$$C_3 = \frac{128\pi^4 m_0 e_0^{10}}{c_0^3 h^2 (6\pi m_0 k)^{3/2}} = 1,719 \cdot 10^{-33} \text{ ед. СГС.}$$

#### 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ ИОНОВ

Подставляя  $G_n(\nu) = 1$  в (106) и (107) и заменяя  $(\chi_{z-1} - E_n)$  выражением, справедливым для водородоподобных спектров,

$$\chi_{z-1} - E_n = \frac{z^2 \chi_H}{n^2} = \frac{2\pi^2 m_0 e_0^4 z^2}{(nh)^2}, \quad (108)$$

получаем хорошо известную формулу для одноэлектронных систем. Эту формулу, согласно Унзольду [40], можно упростить путем аппроксимирования суммы, начиная с некоторого главного квантового числа  $n'$ , интегралом

$$\kappa(\nu) = C_1 n_{z-1} \frac{2g_{z,1} z^4}{U_{z-1} \nu^3} \exp\left(-\frac{z^2 \chi_H}{kT_e}\right) D, \quad (109)$$

$$\varepsilon_\nu = C_3 n_e n_{z,1} \frac{z^4}{T_e^{3/2}} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right) D, \quad (110)$$

где

$$D = \sum_{n > \hat{n}}^{n'} n^{-3} \exp\left(\frac{z^2 \chi_H}{n^2 kT_e}\right) + \frac{h^2 kT_e}{4\pi^2 m_0 e_0^4 z^2} \left[ \exp\left(\frac{z^2 \chi_H}{n'^2 kT_e}\right) - 1 \right]. \quad (111)$$

Суммирование начинается с  $\hat{n} = z \sqrt{\chi_H / h\nu}$ . Для  $h\nu < z^2 \chi_H / n'^2$  сумма исчезает<sup>2)</sup> и для малых частот получаем

$$\kappa(\nu) = C_5 n_{z-1} \frac{2g_{z,1} z^2 T_e}{U_{z-1} \nu^3} \exp\left(-\frac{z^2 \chi_H}{kT_e}\right) \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT_e}\right) - 1 \right] \quad (112)$$

1) Унзольд взял  $n' = 5$ .

2)  $\sigma_n^{\text{кл}}(\nu) = 0!$

или

$$\varepsilon_\nu = C_4 n_e n_{z,1} \frac{z^2}{T_e^{1/2}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right) \right], \quad (113)$$

где

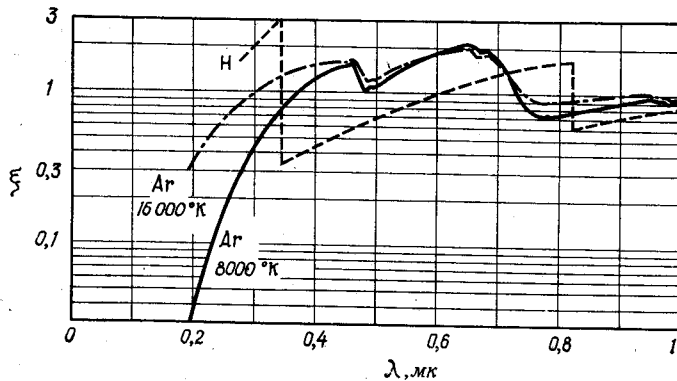
$$C_4 = \frac{16\pi e_0^6}{3c_0^3 (6\pi m_0^3 k)^{1/2}} = 5,443 \cdot 10^{-39} \text{ ед. СГС,}$$

$$C_6 = \frac{16\pi^2 k e_0^6}{3 \sqrt{3} c_0 h^4} = 8,915 \cdot 10^{23} \text{ ед. СГС.}$$

Статистический вес  $g_{z,1}$  водородоподобной системы равен  $U_z$ . Это равенство следует использовать при выводе (113) из (112). Если обе формулы используются как приближение для более сложных систем, то  $g_{z,1}$  необходимо заменять на  $U_z$ . В таких системах имеются уровни, которые принадлежат исходным ионам в возбужденном состоянии  $E_{z,k}$  (с  $g_{z,k}$ ) и которые сходятся к ионизационному пределу  $\chi_{z-1} + E_{z,k}$ . Тогда вместо (112) получается сумма по уровням  $k [g_{z,k} \exp(-E_{z,k}/kT_e)]$ , которая приводит к статистической сумме в (112).

### 5. $\xi$ -ФАКТОР БИБЕРМАНА

Очень простые приближенные формулы для водородоподобных ионов (112) и (113), которые получаются при усреднении по «частотоколу» поглощения и замене факторов Гаунта на единицу, можно использовать, согласно



Ф и г. 1.11.  $\xi$ -фактор для водорода и аргона (Шлютер [45]).

Биберману и др. [43, 44], для точного представления  $\kappa(\nu)$  и  $\varepsilon_\nu$ . Приближенные формулы можно обобщить, подставив  $\chi_{z-1}$  вместо  $z^2\chi_H$ . Статистический вес  $g_{z,1}$  больше не равен единице. Теперь можно ввести поправочный множитель  $\xi(T_e, \nu)$  или  $\xi(T_e, \lambda)$ <sup>1)</sup>, с помощью которого приближенные формулы (112) и (113) преобразуются в точные выражения (95) и (104):

$$\kappa(\nu) = 2C_5 n_{z-1} \frac{g_{z-1}}{U_{z-1}} \frac{z^2 T_e}{\nu^3} \exp\left(-\frac{z^2 \chi_H}{kT_e}\right) \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT_e}\right) - 1 \right] \xi(T_e, \nu), \quad (114)$$

$$\varepsilon_\nu = C_4 n_e n_z \frac{g_{z,1}}{U_z} z^2 T_e^{-1/2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right) \right] \xi(T_e, \nu). \quad (115)$$

Здесь  $n_{z,1}$  заменено на  $n_z g_{z,1}/U_z$ . Биберман обозначает статистический вес  $g_{z,1}$  через  $\gamma$ . Естественно, что введением  $\xi$ -фактора учитывается скачкообразное изменение реальных коэффициентов у границ серий. В среднем  $\xi$ -фактор близок к единице. На фиг. 1.11 представлены  $\xi$ -факторы для водо-

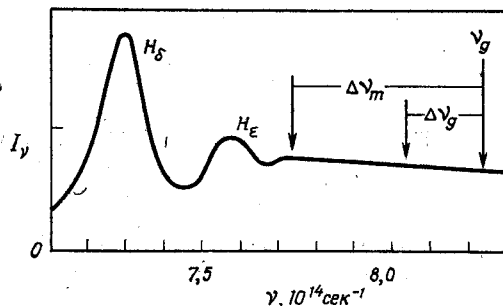
<sup>1)</sup> Биберман приводит формулу, слегка отличающуюся от (115) в области высоких частот.

рода и нейтрального аргона. Как и ожидалось, величина  $\xi$  слабо зависит от температуры.

В дополнение к расчетам Бибермана Шлютер [45, 46] рассчитал  $\xi$ -факторы для нейтральных благородных газов (за исключением гелия) и для Cl, OI и NI.

### 6. СДВИГ ГРАНИЦЫ СЕРИИ

Мы еще не рассматривали в этом параграфе влияние уменьшения энергии ионизации на величину  $\Delta\chi_{z-1}$  (см. § 3, п. 8), на распределение энергии в непрерывном спектре. В большинстве случаев эта поправка неважна в пределах точности теории и эксперимента. Однако ее можно последовательно учесть, умножая правую часть формул (104), (107), (110) и (115) на  $\exp(-\Delta\chi_{z-1}/kT_e)$ .



Ф и г. 1.12. Сдвиг границы серии в плазме  $H_2O$  (Юргенс [47]).

С уменьшением энергии ионизации связан сдвиг границы серии, который приводит к ограничениям в области длинных волн или малых частот. Сдвиг границы в шкале частот равен

$$\Delta\nu_g = -\frac{\Delta\chi_{z-1}}{h}. \quad (116)$$

Этот сдвиг нельзя, однако, наблюдать в спектре, поскольку главным является другой эффект. Спектральные линии, лежащие близко к границе серии, соответствуют сильно возбужденным состояниям, близким к границе ионизации. Эти уровни вследствие своей водородоподобности испытывают расщепление из-за линейного штарк-эффекта. Таким образом, флуктуирующие микрополя, обусловленные окружающими заряженными частицами, уширяют уровни и соответствующие линии, и для квантовых чисел  $n$ , больших, чем критическое главное квантовое число  $n_m$ , высшие члены серии нельзя разделить. Они образуют континуум, который сливается со свободно-связанным континуумом при высоких частотах (фиг. 1.12). Это слияние линий впервые было детально исследовано Инглисом и Теллером [48] и недавно Видалем [49]. Слияние линий начинается, когда штарковское расщепление уровня сравнивается с расстоянием между уровнями:

$$\frac{3}{2} \frac{a_0 n_m^2 e_0 F}{z} = \frac{e_0^2 z^2}{2a_0 n_m^3}. \quad (117)$$

Здесь  $a_0$  — боровский радиус,  $F$  — нормальная напряженность поля, для которой Инглис и Теллер приняли значение  $F = 3,7e_0 n_{зар}^{2/3}$ . Для плазмы с однократно заряженными ионами подстановка  $F$  в (117) дает хорошо известное соотношение Инглиса — Теллера между плотностью заряженных частиц  $n_{зар}$  и главным квантовым числом  $n_m$  наивысшего наблюдаемого

члена серии:

$$\lg n_{\text{зар}} = 23,26 - 7,5 \lg n_m. \quad (118)$$

Для  $n_{\text{зар}}$  следует подставлять сумму плотностей электронов и ионов (Унзольд [4]), если  $T_e$  удовлетворяет неравенству

$$T_e < \frac{3\pi^3 e_0^2}{64 a_0 k n_m} = \frac{4,6 \cdot 10^5}{n_m} \text{ }^\circ\text{K}. \quad (119)$$

В противном случае в качестве  $n_{\text{зар}}$  берут плотность ионов.

Из способа вывода следует, что формула Инглиса — Теллера является скорее приближенной, чем точной. Она часто использовалась для оценки плотности электронов. Видаль [49] значительно улучшил метод.

Сдвиг границы серии из-за слияния линий равен

$$\Delta v_m = - \frac{z^2 \chi_H}{n_m^2}. \quad (120)$$

Используя (118) для  $z=1$ , получаем приближенное выражение для  $\Delta v_m$ :

$$\Delta v_m \approx -2 \cdot 10^9 n_{\text{зар}}^{4/15} \text{ сек}^{-1}, \quad (121)$$

где плотность  $n_{\text{зар}}$  дана в  $\text{см}^{-3}$ .

Сдвиг  $\Delta v_m$  почти всегда больше, чем  $\Delta v_g$ , так что уменьшение энергии ионизации нельзя получить из наблюдаемого сдвига границы серии. Отношение этих величин равно

$$\frac{-\Delta v_g}{\Delta v_m} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} n_{\text{зар}}^{7/30} T_e^{-1/2}. \quad (122)$$

## 7. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ

Ряд элементов при захвате свободного электрона образует отрицательные атомные ионы. Соответствующие континуумы можно наблюдать в плазме при подходящих условиях. Этот рекомбинационный процесс сопровождается излучением фотона. Обратный процесс называется «фотоотрывом»: электрон «спирается» фотоном. Энергия связи отрицательных ионов мала по сравнению с энергией связи нейтральных атомов или положительных ионов. Она лежит в пределах от 0 до 4 эв (для водорода 0,75 эв).

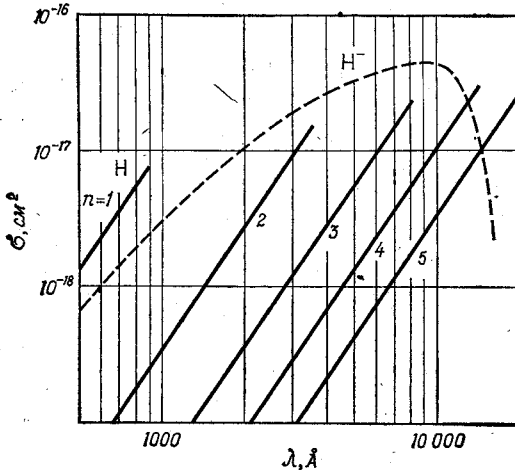
В общем отрицательные атомные ионы имеют только одно связанное состояние, так что их спектр является сплошным. В свою очередь он состоит из частей, обусловленных свободно-связанными и свободно-свободными переходами.

Соответствующие сечения нельзя рассчитать классически. Для отрицательного иона водорода, который вносит заметный вклад в непрерывный спектр солнца, измерения и квантовомеханические расчеты дают довольно надежные значения [50, 51]. Имеется ряд экспериментальных результатов для других ионов ( $O^-$ ,  $N^-$ ,  $S^-$ ,  $Cl^-$ ). Обзор, посвященный отрицательным ионам, сделал Бренском [52].

Наблюдение непрерывных спектров отрицательных ионов оказывается возможным только в том случае, если в условиях опыта наряду с элементом, предположительно образующим отрицательные ионы, присутствует другой элемент, который легко ионизируется и таким образом поставит необходимые электроны. Это легко понять, воспользовавшись формулой Саха для отрицательных ионов

$$\frac{n_e n_0}{n_-} = S_-(T) \quad (z=0)!. \quad (123)$$

Для того чтобы получить большое отношение  $n_-/n_0$ ,  $n_e$  должно быть велико, но  $T$  — мало! Низкая энергия ионизации отрицательных ионов приводит к тому, что их континуумы могут быть иногда сравнимы по интенсивности с континуумами положительных ионов в видимой области и в ближней инфракрасной области. В этой области в непрерывное поглощение вносят вклад только сильно возбужденные состояния нейтральных атомов. Число же



Ф и г. 1.13. Сечение свободно-связанного поглощения иона  $H^-$  и классические сечения поглощения для первых уровней водорода.

легко записать выражение для коэффициента поглощения отрицательных ионов (на 1 см длины):

$$\kappa(\nu)^- = n_- \sigma(\nu)^-. \quad (124)$$

Если учтено поглощение при свободно-свободных переходах, величина  $\sigma(\nu)^-$  естественно, оказывается зависящий от температуры. Коэффициент испускания получают из закона Кирхгофа и формулы (124):

$$\bar{\epsilon}_\nu^- = n_- \sigma(\nu)^- \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right). \quad (125)$$

Эта формула справедлива только при термодинамическом равновесии и в ЛТР.

## 8. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР ПРИ СВОБОДНО-СВОБОДНЫХ ПЕРЕХОДАХ

Первый расчет тормозного излучения был проделан Крамерсом [39] с помощью принципа соответствия. Для случая максвелловского распределения электронов по скоростям из расчетов Крамерса вытекает следующая формула для коэффициента испускания:

$$\bar{\epsilon}_\nu^{ff} = C_4 z^2 \frac{n_e n_z}{T_e^{1/2}} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right). \quad (126)$$

При термодинамическом равновесии из закона Кирхгофа следует, что

$$\kappa^{ff}(\nu) = C_6 n_e n_z \frac{z^2}{\nu^3 T_e^{1/2}} = C_5 n_{z-1} \frac{2U_z}{U_{z-1}} \frac{z^2 T_e}{\nu^3} \exp\left(-\frac{\chi_{z-1}}{kT_e}\right), \quad (127)$$

где

$$C_6 = \frac{8\pi e_0^3}{3m_0 h c_0 (6\pi m_0 h)^{1/2}} = 3,692 \cdot 10^8 \text{ ед. СГС.}$$

сильно возбужденных атомов мало по сравнению с числом атомов в основном состоянии из-за бoльцмановского множителя. Таким образом, сечение поглощения, приходящееся на один нейтральный атом  $\sigma_{z-1}(\nu)$ , может быть на несколько порядков меньше, чем сечение поглощения для отрицательного иона.

Атомные коэффициенты поглощения отрицательных ионов при свободно-связанных и свободно-свободных переходах по порядку величины совпадают с соответствующими коэффициентами для нейтральных частиц. На фиг. 1.13 представлены коэффициенты поглощения для водорода и отрицательного иона водорода.

Обе эти формулы справедливы в том случае, если в плазме имеются ионы только одного заряда. В других случаях следует выполнить суммирование по  $z^2 n_z$ .

Квантовомеханические поправки снова учитывают путем введения фактора Гаунта в обе формулы. Факторы Гаунта для тормозного излучения были рассчитаны Карзасом и Лэттером [42]. Эта поправка в коротковолновой области спектра незначительна, поскольку здесь рекомбинационное излучение превалирует над тормозным излучением.

В области малых частот область применимости формул (126) и (127) ограничена плазменной частотой  $\nu_P$ :

$$\nu_P = \sqrt{\frac{e_0^2 n_e}{\pi m_0}} = 9,0 \cdot 10^8 \sqrt{n_e} \text{ сек}^{-1}. \quad (128)$$

В области  $\nu > \nu_P$  формулы Крамерса можно получить, согласно Буркхардту, из формулы для спадающего крыла резонансной линии на плазменной частоте  $\nu_P$ . Дальнейшие поправки к формулам Крамерса в длинноволновой области можно найти в [31].

Если положить факторы Гаунта равными единице, то полный коэффициент непрерывного испускания приобретает простой вид.

$$\epsilon_{\nu, c} = \epsilon_{\nu}^{ff} + \epsilon_{\nu}^{bf} = C_4 n_e n_z \frac{z^2}{T_e^{1/2}}. \quad (129)$$

Для коэффициента поглощения при термодинамическом равновесии аналогично получаем

$$\begin{aligned} \kappa_{\nu}(\nu) &= \kappa_{\nu}^{ff}(\nu) + \kappa_{\nu}^{bf}(\nu) = C_6 n_e n_z \frac{z^2}{\nu^3 T_e^{1/2}} \exp\left(\frac{h\nu}{kT_e}\right) = \\ &= C_5 n_{z-1} \frac{2U_z}{U_{z-1}} \frac{z^2 T_e}{\nu^3} \exp\left(\frac{h\nu - \chi_{z-1}}{kT_e}\right). \end{aligned} \quad (130)$$

Обе формулы являются приближенными. Ошибки особенно велики в области ультрафиолета, где важна структура границы поглощения.

## § 6. ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

### 1. МОДЕЛИ СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЫ

Состояние полного термодинамического равновесия (ТР) редко достигается в плазме — как в лабораторной, так и в плазме космического пространства. Такая плазма является однородной, и так как поле излучения является равновесным, оптическая толщина плазмы  $\tau(\nu) = \kappa(\nu) x$  во всех направлениях и для всех частот должна быть велика по сравнению с единицей. Это имеет место во внутренних частях звезд, в замкнутой плазме (например, в печи Кинга) и, возможно, частично в разрядах при высоких давлениях в условиях магнитной термоизоляции. Как уже отмечалось, состояние такой равновесной плазмы описать легко. Оно не представляет, однако, особого интереса со спектроскопической точки зрения, поскольку излучение из внутренних частей плазмы нельзя измерить.

Обычно плазма является оптически тонкой при любой заданной частоте  $\tau(\nu) \ll 1$ , так что излучение, которое генерируется во внутренней части объема, может выходить из плазмы и быть использовано для спектроскопического анализа. Это означает вместе с тем, что полное термодинамическое равновесие больше не может существовать, так что полное описание состояния плазмы несколькими термодинамическими переменными оказывается невозможным.

Единственный практический способ исследования таких неравновесных плазм без привлечения обширных численных и теоретических расчетов



состоит в аппроксимации сложного состояния плазмы упрощенными моделями состояний. Эти состояния или модели плазмы обсуждаются далее в этом параграфе. Будут сделаны два предположения:

- а) модель описывает однородную плазму,
- б) распределение электронов по скоростям является максвелловским.

Чтобы применить одну из этих моделей к реальной, неоднородной плазме, последняя должна быть «достаточно однородной». Это означает, что плазму можно разделить на элементы с объемом  $\Delta V$ , которые достаточно малы, так что плазма в них может считаться однородной, но в то же время они достаточно велики, так что частица или фотон на своем пути через элемент  $\Delta V$  испытывает достаточное число столкновений. Средний свободный пробег частицы или фотона между двумя столкновениями, существенными для механизма модели, можно обозначить через  $\lambda_i$ , а параметры, которые описывают локальное состояние плазмы, — через  $P_k$ . Тогда необходимое условие для достаточной однородности плазмы можно сформулировать следующим образом:

$$\lambda_i \text{ grad } P_k < P_k. \quad (131)$$

Для фотонов критическая длина пробега равна обратному коэффициенту поглощения. Для частиц же надо подставлять следующее выражение:

$$\lambda_i = \int \frac{F(v) dv}{n\sigma(v)}. \quad (132)$$

Здесь  $F(v)$  — нормированная функция распределения для относительных скоростей сталкивающихся частиц,  $\sigma(v)$  — эффективное сечение столкновения,  $n$  — число частиц-мишеней в  $1 \text{ см}^3$ . Сечение  $\sigma(v)$  может быть также сечением возбуждения или ионизации.

Чем лучше выполняется для всех процессов и параметров плазмы неравенство (131), тем с большей точностью состояние элемента объема плазмы  $\Delta V$  может быть описано локальной моделью. Более детальное обсуждение релаксационных длин в неоднородных плазмах проводится в книге Грима [4].

Относительно простые модели состояния плазмы, которые будут приведены ниже, не являются полными моделями, необходимыми для спектроскопического анализа состояния плазмы, описанного в § 1. Для полной модели реальной плазмы необходимо знание пространственного распределения параметров плазмы. Локальная модель состояния и пространственная модель вместе образуют полную модель плазмы. Это разделение, которое очень удобно для практического спектроскопического анализа, возможно только в том случае, когда состояние плазмы можно описывать локально.

Пространственные модели плазмы не будут рассматриваться в дальнейшем. Последующее рассмотрение всегда относится к локальным моделям состояния плазмы, даже если это специально не отмечается.

## 2. ПРОЦЕССЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПЛАЗМЕ

Необходимым и достаточным условием достижения полного термодинамического равновесия в плазме является выполнение принципа детального равновесия для каждого отдельного процесса взаимодействия. В плазме, которая не находится в состоянии полного равновесия, детально не уравновешено по крайней мере несколько процессов. Для описания таких неравновесных состояний следует рассматривать эти процессы взаимодействия. Они определяются атомными сечениями и вероятностями переходов; следовательно, если мы хотим изучать отклонения от термодинамического равновесия, необходимо знать эти величины. При рассмотрении плазмы, находящейся

в термодинамическом равновесии, с этим большим затруднением не приходится сталкиваться.

В этой главе не будут обсуждаться величины и методы расчета сечений для процессов взаимодействий. По этому вопросу читатель может обратиться к соответствующим монографиям (см., например, [53, 38]).

В дальнейшем символы  $M$  или  $M'$  будут использоваться для атома или иона, заряд или состояние возбуждения которых будут задаваться в случае необходимости индексами при символах  $M$  и  $M'$ . Скорости переходов  $N_{\rightarrow}$  и  $N_{\leftarrow}$  дают число процессов одного типа, происходящих в определенном направлении в  $1 \text{ см}^3$  за  $1 \text{ сек}$ . При детальном равновесии требуется, чтобы  $N_{\rightarrow} = N_{\leftarrow}$ . Для обозначений коэффициентов скоростей различных процессов не существует принятого соглашения, так что можно выбирать произвольные символы.

Помимо процессов упругих столкновений, которые здесь не представлены, наиболее важными процессами являются столкновительное и радиационное возбуждение и ионизация.

#### 1. Излучение и поглощение спектральных линий:

со скоростями переходов

$$M_k \xrightarrow{\leftarrow} M_i + h\nu_{ik}$$

$$N_{\rightarrow} = n_k (A_{ki} + u_{\nu} B_{ki}), \quad (133)$$

$$N_{\leftarrow} = n_i u_{\nu} B_{ik}. \quad (134)$$

[Эти формулы справедливы, если плотность излучения  $u_{\nu}$  постоянна в пределах линии. Если  $u_{\nu}$  в этой области сильно зависит от частоты, то следует использовать более сложные формулы; см. § 7, формула (188).]

#### 2. Фоторекомбинация и фотоионизация:

со скоростями переходов

$$M_{z, i} + e \xrightarrow{\leftarrow} M_{z-1, k} + h\nu$$

$$N_{\rightarrow} = n_e n_{z, i} \int_{v_0}^{\infty} F^*(\nu) \sigma_{z, k}(\nu) \nu d\nu = n_e n_{z, i} \alpha_{z, k}(T_e), \quad (135)$$

$$N_{\leftarrow} = n_{z-1, k} 4\pi \int_{\nu_k}^{\infty} J_{\nu} \sigma'_{z-1, k}(\nu) \frac{d\nu}{h\nu} = n_{z-1, k} \beta_{z-1, k}. \quad (136)$$

Здесь  $v_0$  определяется из условия  $\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \nu_k h = \chi_{z-1} - E_k$ .

#### 3. Возбуждение и тушение (при ударах 2-го рода) свободными электронами:

со скоростями переходов

$$M_i + e (E_{кин}) \xrightarrow{\leftarrow} M_k + e (E'_{кин}), \quad E_{кин} > E'_{кин}$$

$$N_{\rightarrow} = n_i n_e \int_{v_0}^{\infty} F^*(\nu) \sigma_{ik}(\nu) \nu d\nu = n_i n_e K_{i < k}(T_e), \quad (137)$$

$$N_{\leftarrow} = n_k n_e \frac{g_i}{g_k} K_{i < k} \exp \frac{E_k - E_i}{kT_e} = n_k n_e K_{k > i}(T_e). \quad (138)$$

#### 4. Возбуждение и тушение тяжелыми частицами:

со скоростями переходов

$$M_i + M' (E_{кин}) \xrightarrow{\leftarrow} M_k + M' (E'_{кин}), \quad E_{кин} > E'_{кин}$$

$$N_{\rightarrow} = n_i n_{M'} K_{i < k}^a(T_g), \quad (139)$$

$$N_{\leftarrow} = n_k n_{M'} K_{k > i}^a(T_g). \quad (140)$$

## 5. Ионизация электронами и трехчастичная рекомбинация:

$$M_{z-1, k} + e(E_{\text{кин}}) \rightleftharpoons M_{z, 1} + e(E'_{\text{кин}}) + e, \quad E_{\text{кин}} > E'_{\text{кин}}$$

со скоростями переходов

$$N_{\rightarrow} = n_{z-1, k} n_e \int_{v_k}^{\infty} F^*(v) \sigma_{z-1, k}(v) v dv = n_{z-1, k} n_e S_{z-1, k}(T_e), \quad (141)$$

$$\begin{aligned} N_{\leftarrow} &= n_{z, 1} n_e^2 \frac{g_{z-1, 1}}{g_{z, 1}} \frac{h^3 \exp[(\chi_{z-1} - E_k)/kT_e]}{2(2\pi m_0 kT_e)^{3/2}} S_{z-1, k}(T_e) = \\ &= n_{z, 1} n_e^2 Q_{z, 1, z-1, k}(T_e), \end{aligned} \quad (142)$$

где

$$v_k = \sqrt{\frac{2}{m_0} (\chi_{z-1} - E_k)}.$$

## 3. ЛОКАЛЬНОЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ (ЛТР)

Часто встречающимся состоянием плазмы, которое близко к состоянию термодинамического равновесия и которое очень легко описать, является состояние локального термодинамического равновесия (ЛТР). Как уже отмечалось выше, так называется состояние, в котором все функции распределения, за исключением функции распределения лучистой энергии, являются бальцмановскими: температура  $T$  в распределении Максвелла — Больцмана по скоростям равна  $T$  в формуле Больцмана и равна  $T$  в формуле Саха, но интенсивность  $I_\nu$  не равна  $B_\nu(T)$ . Следовательно, о температуре плазмы можно говорить только с оговоркой. Чтобы отметить эту ограниченную применимость, температура, входящая в приведенные выше бальцмановские распределения, будет обозначаться как электронная температура  $T_e$ .

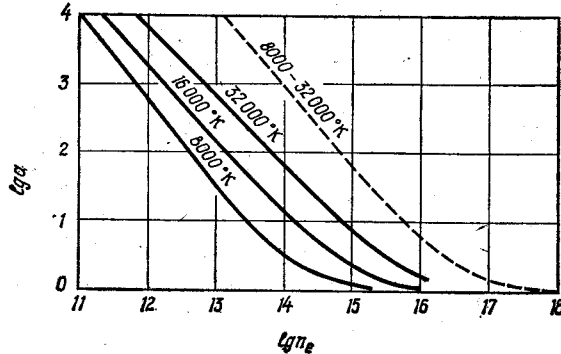
Термин ЛТР первоначально предназначался для описания состояния вещества во внутренних частях звезд, поле излучения в которых почти равносильно. В звездах всегда существует градиент температуры, а следовательно, и поток энергии. Несмотря на это, можно довольно хорошо описать локальное состояние вещества, если предположить, что имеет место термодинамическое равновесие. Так возник термин «локальное» термодинамическое равновесие. Здесь, однако, термин ЛТР используется в смысле, определенном выше: равновесие с полем излучения малой интенсивности.

Состояние локального термодинамического равновесия часто встречается в лабораторных плазмах. Это легко понять, если рассмотреть процессы взаимодействия (133) — (142). В плазме с достаточно большой плотностью (особенно плотностью электронов), которая является оптически тонкой для большинства частот, столкновительные процессы — в особенности те, в которых участвуют электроны, — играют доминирующую роль. Такую плазму называют столкновительной.

Если в такой плазме имеет место ЛТР, то детальный баланс процессов 1 и 2 нарушается, поскольку в разреженном поле излучения число актов испускания больше числа актов фотопоглощения. Следует ожидать уменьшения числа свободных электронов и возбужденных частиц. Эти возмущения оказывают влияние на детальный баланс процессов 3—5. Если детальный баланс для этих последних процессов нарушается лишь незначительно, то реализуется состояние локального термодинамического равновесия. Переход от состояния полного термодинамического равновесия к ЛТР и от ЛТР к состоянию, которое еще больше отличается от термодинамического равновесия, является непрерывным. «Хорошее» ЛТР-состояние следует ожидать в тех случаях, когда разреженность поля излучения незначительна

или когда большое число столкновений обеспечивает детальное равновесие в процессах 3—5. Это детальное равновесие прямо ведет к формулам Саха и Больцмана.

Бейтс, Кингстон и Мак-Уиртер в двух фундаментальных статьях [54] теоретически рассмотрели вопрос о том, при каких условиях следует ожидать ЛТР в плазме, если: а) излучение не поглощается [ $\tau(\nu) \ll 1$ ] и б) имеется равновесное излучение в пределах лаймановских линий. Они приняли во внимание процессы 1, 2, 3, 5 и решили приведенную ниже систему уравнений для водородной плазмы при заданных значениях электронной темпера-



Ф и г. 1.14. Неравновесная заселенность основного состояния водорода в зависимости от температуры и электронной плотности (Бейтс, Кингстон и Мак-Уиртер [54]).

Пунктирная линия: оптически тонкая плазма. Сплошные линии: плазма оптически толстая в лаймановских линиях.

туры  $T_e$  и плотности электронов  $n_e = n_P$  (индекс  $P$  отвечает протону). Каждое уравнение описывает процесс заселения и опустошения одного уровня атома водорода:

$$\begin{aligned} \frac{dn_k}{dt} = & -n_k \sum_{i < k} A_{ki} + \sum_{i > k} n_i A_{ik} + n_e^2 \alpha - n_k n_e S + n_e^3 Q + \\ & + n_e \sum_i n_i (K_{i < k} + K_{i > k}) - n_e n_k \sum_i (K_{k < i} + K_{k > i}). \end{aligned} \quad (143)$$

Индекс  $k$  пробегает значения от 1 (основной уровень) до бесконечности<sup>1)</sup>. Стационарное решение (143) дает, помимо других величин, заселенности водородных уровней в зависимости от  $T_e$  и  $n_e$ . Кинетическая температура  $T_e$ , которая в явном виде не входит в приведенную выше систему, включена в коэффициенты для скоростей процессов.

Некоторые результаты этого расчета представлены на фиг. 1.14. По оси ординат здесь отложена величина  $a$  — заселенность  $n_1$  основного состояния, деленная на равновесную заселенность  $n_1^*$ , в зависимости от  $n_e$  ( $T_e$  — параметр). Состояние ЛТР ( $n_1/n_1^* = 1$ ) достигается при плотностях электронов, больших  $10^{18} \text{ см}^{-3}$  и практически не зависящих от температуры электронов в интервале  $8000\text{—}64\,000^\circ \text{ K}$ .

Сплошные кривые на фиг. 1.14 суть результаты расчетов для случая, когда вероятности переходов для всех лаймановских линий полагаются равными нулю. Это означает, что потери энергии на резонансное излучение, которые почти равны потерям на излучение в запертых лаймановских линиях, отсутствуют: излучение может выходить из плазмы только путем диффузии. В этом случае состояние ЛТР достигается при гораздо меньших электрон-

<sup>1)</sup> В рассматриваемых расчетах суммирование обрывалось на подходящем образом выбранном значении  $k$ .

ных плотностях. Возрастание  $n_1/n_1^*$  с увеличением температуры при постоянном значении  $n_e$  можно понять, учитывая, что происходящее при этом уменьшение  $n_1$  оказывается более слабым, чем уменьшение  $n_1^*$ .

Сильную зависимость ЛТР от степени самопоглощения лаймановских линий в водородной плазме с преобладающей ролью столкновений можно объяснить высоким потенциалом возбуждения и большими вероятностями переходов для этих линий. Самый низкий возбужденный уровень ( $E_2 \approx 10$  эв) расположен только на 3,6 эв ниже границы ионизации. Коэффициенты  $K_{1<2}$ ,  $K_{1<3}$ , ..., ответственные за заселение уровней электронным ударом, гораздо меньше коэффициентов для переходов между возбужденными уровнями. Это справедливо до тех пор, пока в плазме имеется нейтральный водород ( $T_e \leq 50\,000^\circ$  К, что соответствует  $E_{\text{кин, эл}} < 10$  эв). Для того чтобы в оптически тонкой плазме осуществлялось состояние ЛТР, число актов спонтанного излучения в лаймановских линиях должно быть мало по сравнению с числом возбуждений из основного состояния.

Позднее Дравин [55] провел более обширные расчеты, рассмотрев также [56, 57] гелиевую и литиевую плазмы. Очевидно, однако, что дальнейшее распространение таких расчетов на случай более сложных атомов невозможно, поскольку увеличивается число допустимых процессов, а коэффициенты для скоростей этих процессов известны плохо. Конечно, качественно подобные расчеты можно применять и для других атомов, если их система уровней сходна с той, которая имеется у водорода, т. е. если энергия первого возбужденного уровня сравнима с энергией ионизации<sup>1)</sup>. Тогда в области температур, где атомы не полностью ионизованы, средняя кинетическая энергия электронов меньше, чем энергия возбуждения первого возбужденного состояния.

Необходимое условие для существования ЛТР в плазме с преобладающей ролью столкновений можно получить, если принять, что столкновительное возбуждение через наибольшую энергетическую щель в спектре является слабейшим звеном в цепи столкновительных процессов, приводящих к ЛТР: вероятность столкновительного перехода должна быть раз в 10 больше вероятности спонтанного испускания. Следуя этим рассуждениям, Грим [15], Мак-Уиртер [60] и Вильсон [61] независимо вывели простой критерий для существования ЛТР в оптически тонкой плазме с преобладающей ролью столкновений:

$$n_e \geq 10^{14} T_e^{1/2} (E_k - E_l)^3 \text{ (см}^{-3}\text{)}. \quad (144)$$

Здесь  $T_e$  и  $E_k - E_l$  выражены в эв. Наибольшая энергетическая щель  $E_k - E_l$  обычно совпадает с  $E_2 - E_1$ .

Модель плазмы, рассмотренная Бейтсом, Кингстоном и Мак-Уиртером, касается однородной плазмы, в которой все потери энергии обусловлены излучением. По этой причине можно ожидать, что в плазме при достижении состояния ЛТР кинетические температуры электронов и тяжелых частиц будут равны. В реальной, почти однородной плазме, которая, согласно приведенной выше оценке, должна была бы находиться в ЛТР, тем не менее встречаются отклонения от ЛТР из-за механизма нагрева. Обычно энергия поступает в плазму при омическом нагреве (мы оставляем сейчас в стороне совершенно другой механизм нагрева в ударных волнах<sup>2)</sup>). Тогда основную часть вкладываемой энергии получают электроны и путем столкновений передают определенную долю этой энергии тяжелым частицам. Таким образом, температура электронов всегда будет превосходить температуру атомов и ионов. Финкельбург и Меккер [65] оценили результирующую разницу

<sup>1)</sup> Колесников [58] и Рихтер [59] экспериментально показали, что в аргонной плазме ЛТР наступает при  $n_e \approx 5 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>. Это значение согласуется со значением, взятым из фиг. 1.14.

<sup>2)</sup> См., например, [62—64].

температур:

$$\frac{T_e - T_g}{T_e} = \frac{m}{m_0} \left( \frac{\lambda_e e_0 F}{3kT_e} \right)^2. \quad (145)$$

Здесь  $m$  — масса тяжелых частиц,  $\lambda_e$  — средняя длина свободного пробега электронов,  $F$  — напряженность приложенного электрического поля. В сильноточных электрических дугах  $(T_e - T_g)/T_e$  составляет несколько процентов. Для плазмы с высокой степенью ионизации Грим [4] приводит сходную оценочную формулу

$$F^2 \ll \frac{m_0}{m} \left( 10^{-7} \frac{n_e}{T_e} \right)^2 \quad (146)$$

( $F$  — в в/м,  $n_e$  — в см<sup>-3</sup>,  $T$  — в °К). Для того чтобы  $T_e$  совпадало с  $T_g$ , это соотношение должно быть выполнено.

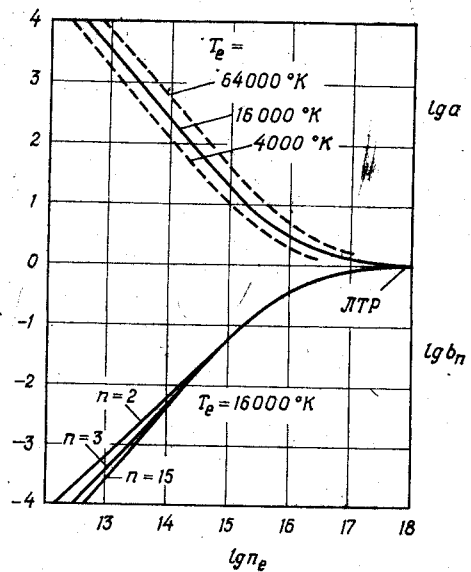
Здесь не обсуждаются условия, при которых можно ожидать существования ЛТР в плазме с преобладающей ролью излучения. Такое исследование должно быть гораздо более сложным, чем в случае плазмы с преобладающей ролью столкновений, потому что возбуждение в такой плазме сильно зависит от профиля линии и поля излучения, которые нельзя описать с помощью одного простого параметра, такого, как, например, электронная температура. Кроме того, в лабораторных условиях очень редко встречается плазма с преобладающей ролью излучения. Плазма с преобладающей ролью излучения в звездных атмосферах рассмотрена в [7].

#### 4. ЧАСТИЧНОЕ ЛОКАЛЬНОЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Заселенности в оптически тонкой плазме с преобладающей ролью столкновений не подчиняются распределению Больцмана, если не выполняется критерий (144). Мак-Уиртер и Хёрн [66] показали, однако, что в большом интервале плотностей электронов ниже критической плотности, достаточной для существования ЛТР, имеет место детальное равновесие для всех столкновительных процессов, в которых не участвуют атомы в основном состоянии. Они решили систему уравнений баланса (143) в широком интервале  $T_e$  и  $n_e$  с учетом сильно возбужденных уровней. Расчеты проводились для водорода и водородоподобных атомов, таких, как  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$ , ... Часть результатов представлена на фиг. 1.15. Величина  $a$  и  $b_n$  на фиг. 1.15 определяются следующими соотношениями:

$$a = \frac{n_1}{n_1^*}, \quad b_n = \frac{n_n/n_1}{n_n^*/n_1^*}.$$

Индекс относится к главному квантовому числу уровня; звездочкой обозначены заселенности в состоянии ЛТР, определяемые по  $T_e$  и  $n_e$ . Таким образом,  $a = 1$  отвечает состоянию ЛТР. При плотностях электронов ниже критической основное состояние перезаселено ( $a > 1$ ); больцмановский множитель  $n_n/n_{\text{полн}}$  уменьшается. На фиг. 1.15 величина  $b_n$  представлена для



Фиг. 1.15. Частичное ЛТР в водородной плазме (Мак-Уиртер и Хёрн [66]).

$T_e = 16\,000^\circ \text{K}$  и главных квантовых чисел  $n = 2, 3$  и  $15$ . Значения  $b_n$  практически совпадают для плотностей электронов, лежащих между  $10^{14}$  и  $10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Из определения  $b_n$  следует, что при  $b_n = b_{n'}$  имеем

$$\frac{n_n}{n_{n'}} = \frac{n_n^*}{n_{n'}^*} \quad \text{для } n > 1 \text{ и } n' > 1.$$

Таким образом, заселенности возбужденных уровней все еще описываются бальцовским распределением с «температурой»  $T_e$ :

$$\frac{n_n}{n_{n'}} = \exp \frac{E_n - E_{n'}}{kT_e} \quad \text{для } n > 1 \text{ и } n' > 1. \quad (147)$$

Такое состояние плазмы называют состоянием частичного локального термодинамического равновесия (чЛТР). В области чЛТР из данных фиг. 1.15 следует, что  $ab_n = 1$  (или  $n_n = n_n^*$ ). Заселенности для  $n > 1$  оказываются такими же, как и в случае ЛТР, только заселенность основного состояния увеличивается в  $a$  раз. Из условия  $ab_n = 1$ , кроме того, вытекает «формула Больцмана» для случая чЛТР:

$$\frac{n_n}{n_0} \approx \frac{n_n}{n_1} = \frac{1}{a} \frac{g_n}{g_1} \exp \left( -\frac{E_n}{kT_e} \right) \quad (148)$$

и «формула Саха»

$$\frac{n_e^2}{n_0} = \frac{1}{a} S_H(T_e), \quad (149)$$

где  $a = a(T_e; n_e)$ .

Распространение такого подхода на случай других более сложных плазм приводит к обобщенной формуле Саха — Больцмана, из которой следует формула (147):

$$\frac{n_z n_e}{n_{z-1, k}} = \frac{2g_z}{g_{z-1, k}} \left( \frac{2\pi m_0 k T_e}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left( + \frac{E_k - \chi_{z-1}}{kT_e} \right) \quad (k > 1). \quad (150)$$

Можно ожидать, что в плазме, состоящей из нескольких химических элементов, возбуждение и ионизация описываются формулами (148) и (149), в которых величина  $a$  оказывается различной для разных элементов и различных ступеней ионизации. Таким образом, состояние частичного локального термодинамического равновесия описывается параметрами  $T_e$ ,  $n_e$  и величинами  $a_{s, z} = a_{s, z}(T_e, n_e)$ .

Измерения Колесникова [58] указывают, однако, что в слабо ионизованной плазме приведенную выше модель частичного ЛТР следует видоизменить, поскольку нужно учитывать также неупругие столкновения тяжелых частиц [см. (138)]. Колесников исследовал электрическую дугу, горящую в смеси аргона и водорода при атмосферном давлении. Изменяя ток дуги, он мог получить плотности электронов на оси дуги от  $8 \cdot 10^{14}$  до  $4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . При значениях плотности электронов, меньших критической величины, он обнаружил сильные отклонения от ЛТР. Кинетическая температура  $T_g$  тяжелых частиц быстро уменьшается с уменьшением  $n$ . Вместе с  $T_g$  падает также и «температура распределения», которая определяется как такое значение  $T$ , которое удовлетворяет уравнению (147). Это является экспериментальным доказательством того факта, что относительные заселенности возбужденных уровней могут определяться температурой тяжелых частиц <sup>1)</sup>. (Результаты измерений Колесникова приводятся в гл. 3.)

<sup>1)</sup> Сечения возбуждения атомными частицами на таких высоко возбужденных уровнях могут оказаться немалыми по сравнению с сечением возбуждения электронами. — Прим. перев.

При дальнейшем уменьшении плотности электронов применимость модели частичного ЛТР ограничивается все более высокими уровнями и заселенности  $n_2, n_3, \dots$  нижних уровней возрастают (см. фиг. 1.15).

### 5. «КОРОНАЛЬНАЯ» МОДЕЛЬ

При очень малых плотностях атомов и электронов детальное равновесие не выполняется практически для всех процессов. Простое описание состояния такой плазмы возможно только при очень специальных условиях, а именно если плотности электронов и лучистой энергии настолько малы, что с вероятностью, близкой к единице, возбужденный атом будет спонтанно излучать, а единственным механизмом рекомбинации ионизованного атома будет фоторекомбинация. Тогда реализуется «корональная» модель. В этой модели практически не происходит столкновительного возбуждения или снятия возбуждения атомов с возбужденных уровней и не происходят процессы трехчастичной рекомбинации. Баланс между процессами ионизации и рекомбинации

$$n_{z-1,1} n_e S_{z-1,1} = n_{z,1} n_e \alpha_{z,1}$$

приводит к хорошо известной формуле «коронального» равновесия:

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = \frac{S_{z-1,1}(T_e)}{\alpha_{z,1}(T_e)}. \quad (151)$$

Функция в правой части (151) не является универсальной, как в формуле Саха, а зависит от сорта атомов или ионов.

Мак-Уиртер [60] обсуждает выражения для функций  $S_{z-1,1}(T_e)$  и  $\alpha_{z,1}(T_e)$  для различных ионов. Он выводит следующую формулу для однородных ионов:

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = 1,3 \cdot 10^8 \left( \frac{kT_e}{\chi_{z-1}} \right)^{3/4} \frac{1}{\chi_{z-1}^2} \exp \left( - \frac{\chi_{z-1}}{kT_e} \right) \quad (152)$$

$\chi_{z-1}$  в эВ). Оцениваемая точность величины  $n_z/n_{z-1}$  составляет примерно 50%.

Из уравнения баланса для столкновительного возбуждения и спонтанного испускания можно получить формулу, аналогичную формуле Больцмана,

$$n_{z,1} n_e K_{i < k} = n_{z,k} \sum_{i < k} A_{ki},$$

или

$$\frac{n_{z,k}}{n_{z,1}} = \frac{n_e K_{i < k}}{\sum_i A_{ki}} = n_e K_{i < k} \tau. \quad (153)$$

Для грубых расчетов и для оценки условий, при которых применима корональная модель, можно использовать следующие выражения, приведенные в [60]:

$$S_{z-1/2,1}(T_e) = 2,34 \cdot 10^{-7} \frac{(z-1) T_e^{1/4}}{\chi_{z-1}^{7/4}} \exp \left( - 1,16 \cdot 10^4 \frac{\chi_{z-1}}{kT_e} \right) \frac{\text{см}^3}{\text{сек}}, \quad (154)$$

$$\alpha_{z,1}(T_e) = 2,8 \cdot 10^{-1} \frac{(z-1)^2 \text{см}^3}{T_e^{1/2} \text{сек}}, \quad (155)$$

$$K_{i < k}(T_e) = 1,7 \cdot 10^{-4} \frac{f}{(E_k - E_i) T_e^{1/2}} \exp \left( 1,16 \cdot 10^4 \frac{E_k - E_i}{kT_e} \right) \frac{\text{см}^3}{\text{сек}}. \quad (156)$$

Здесь  $f$  — сила осциллятора для перехода  $i \rightarrow k$ ; величины  $E_k - E_i$  и  $\chi$  берутся в электронвольтах.



Следует отметить, что обзор моделей состояния плазмы, приведенный в этом параграфе, не является полным. Гораздо более детальное обсуждение моделей плазмы и обсуждение других моделей, включая зависящие от времени состояния, можно найти в статье Мак-Уиртера, посвященной интенсивности спектральных линий, которая часто цитировалась в этом параграфе.

## § 7. ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ, ВЫХОДЯЩЕГО ИЗ ПЛАЗМЫ

### 1. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Интенсивность  $I_\nu$  или  $I_\lambda$  на поверхности плазмы или излучающего газа является непосредственно наблюдаемой величиной. Излучение плазмы можно наблюдать в направлении оси  $x$  в системе координат, в которой плазма расположена между плоскостями  $x = 0$  и  $x = x_0$ . Вне этого интервала излучение не испускается и не поглощается. Интенсивность в направлении оси  $x$  возрастает вдоль этой оси до тех пор, пока она не достигнет постоянной величины  $I_\nu(x_0)$  для  $x \geq x_0$ .

Соотношение между коэффициентами испускания и поглощения, в общем случае зависящими от координат, и интенсивностью  $I_\nu(x)$  дается уравнением переноса излучения

$$\frac{dI_\nu(x)}{dx} = \varepsilon_\nu(x) - \kappa'(\nu, x) I_\nu(x), \quad (157)$$

которое просто выражает тот факт, что изменение  $\Delta I_\nu$  на расстоянии  $\Delta x$  обусловлено увеличением  $\varepsilon_\nu(x) \Delta x$  из-за испускания и уменьшением  $\kappa'(\nu, x) I_\nu(x) \Delta x$  из-за поглощения. Это уравнение можно легко решить, если известны локальные коэффициенты. При граничном условии  $I_\nu = I_\nu(0)$  для  $x = 0$  решение уравнения (157) имеет вид

$$I_\nu(x_0) = I_\nu(0) \exp \left[ - \int_0^{x_0} \kappa'(\nu, x) dx \right] + \int_0^{x_0} \varepsilon_\nu(x) \exp \left[ - \int_0^x \kappa'(\nu, x) dx \right] dx. \quad (158)$$

Условие  $I_\nu(0) \neq 0$  означает, что излучение  $I_\nu(0)$  генерируется вне плазмы (эксперименты по поглощению).

Уравнение переноса излучения принимает очень простую форму, если вместо  $x$  ввести оптическую глубину

$$\tau'(\nu, x) = \int_x^{x_0} \kappa'(\nu, x) dx \quad d\tau' = -\kappa' dx \quad (159)$$

и вместо  $\varepsilon_\nu(x)$  — «функцию источника»

$$S_\nu(x) = \frac{\varepsilon_\nu(x)}{\kappa'(\nu, x)}. \quad (160)$$

Тогда имеем

$$\frac{dI_\nu(x)}{d\tau'(\nu, x)} = -[S_\nu(x) - I_\nu(x)]. \quad (161)$$

Решение уравнения переноса (158) сильно упрощается, если плазма является оптически тонкой [ $\tau'(\nu, 0) \ll 1$ ] или однородной. В случае оптически тонкой плазмы получаем

$$I_\nu(x_0) = I_\nu(0) + \int_0^{x_0} \varepsilon_\nu(x) dx. \quad (162)$$

Для однородной плазмы интенсивность дается выражением

$$I_{\nu}(x_0) = I_{\nu}(0) e^{-\tau'(\nu)} + S_{\nu}(1 - e^{-\tau'(\nu)}), \quad (163)$$

где

$$\tau'(\nu, 0) = \tau'(\nu) = \kappa'(\nu) x_0.$$

В предельном случае однородного и оптически тонкого или оптически толстого слоя из (163) получаем соответственно

$$\tau'(\nu) \ll 1: \quad I_{\nu}(x_0) = I_{\nu}(0) + \varepsilon_{\nu} x_0, \quad (164)$$

$$\tau'(\nu) \gg 1: \quad I_{\nu}(x_0) = S_{\nu}. \quad (165)$$

Только в случае однородной и оптически тонкой плазмы спектральная интенсивность представляет собой коэффициент испускания и дает таким образом профиль линии  $P_{\nu}$ .

Итак, проблема расчета интенсивности излучения, выходящего из заданной плазмы, сводится к расчету локальных коэффициентов  $\kappa'(\nu)$  и  $\varepsilon_{\nu}$ . Эти последние описывались в § 4 и 5 для случаев полного термодинамического равновесия, ЛТР и плазмы с преобладающей ролью столкновений (см. § 6). В таких плазмах коэффициенты  $\kappa'(\nu)$  и  $\varepsilon_{\nu}$  не зависят от направления. Непрерывную компоненту  $\varepsilon_{\nu}$  и  $\kappa'(\nu)$  можно определить, если известны факторы Гаунта, температура электронов и заселенности уровней, участвующих в переходах. Дискретную компоненту можно найти, если известны вероятности переходов, заселенности  $n_i$  и  $n_k$  и профили линий.

В плазме, не находящейся в состоянии ЛТР, где столкновения не играют решающей роли, может происходить рассеяние излучения. Тогда  $\varepsilon_{\nu}$  и  $\kappa'(\nu)$  являются функциями от интенсивности, и больше нельзя использовать локальное описание  $\varepsilon_{\nu}$  и  $\kappa'(\nu)$ , потому что интенсивность зависит от испускания и поглощения излучения в макроскопическом окружении рассматриваемого элемента объема. Кроме того, профили линий спонтанного испускания, индуцированного испускания и поглощения могут иметь различную форму. Все это, вместе взятое, приводит к очень сложному уравнению переноса, которое будет кратко обсуждаться в конце этого параграфа.

## 2. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СОСТОЯНИИ ЛТР, И В ПЛАЗМЕ С ПРЕОБЛАДАЮЩЕЙ РОЛЬЮ СТОЛКНОВЕНИЙ

Здесь поглощение и испускание в спектральных линиях можно описывать с помощью одного профиля линии и применимы формулы § 4 и 5. Для плазмы с преобладающим линейчатым излучением [ $\tau_L(\nu) \gg \tau_C(\nu)$ ] из (66) и (81) получаем

$$S_{\nu}(x) = \frac{\varepsilon_{\nu}(x)}{\kappa'(\nu, x)} = \frac{2h\nu^3}{c_0^2} \frac{1}{(g_k n_i / g_i n_k) - 1} \quad \begin{cases} n_i = n_i(x), \\ n_k = n_k(x). \end{cases} \quad (166)$$

Из-за совпадения профилей линий для спонтанного испускания, индуцированного испускания и поглощения функция источника  $S_{\nu}(x)$  почти не меняется в пределах линии. При ЛТР член  $g_k n_i / g_i n_k$  можно заменить бoльцмановским множителем  $\exp(-h\nu/kT)$ , и из (166) следует соотношение <sup>1)</sup>

$$S_{\nu}(x) = B_{\nu}(T_e), \quad (167)$$

которое является законом Кирхгофа. В уравнении радиационного переноса (157) и в его решении (158) коэффициент испускания теперь можно заменить на  $\kappa'(\nu) B_{\nu}(T_e)$ .

<sup>1)</sup> Эта формула имеет место для всех значений  $\tau_L(\nu)/\tau_C(\nu)$ .

Решение уравнения переноса для однородного слоя и для  $I_\nu(0) = 0$  (163) принимает вид

$$I_\nu(x_0) = \frac{2h\nu^3}{c_0^2} \frac{1 - \exp[-\tau'(\nu)x_0]}{(g_k n_i / g_i n_k) - 1}. \quad (168)$$

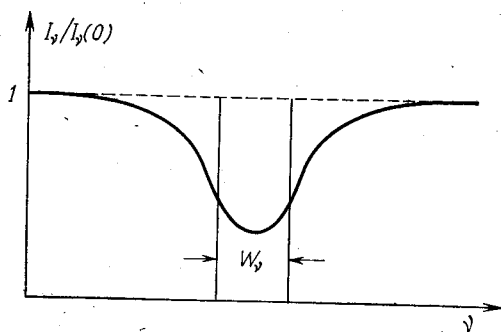
Отсюда можно вывести формулы для следующих предельных случаев (СИ — столкновительно-излучательная плазма):

$$\begin{aligned} \text{ЛТР} \quad & \begin{cases} \tau'(\nu) \ll 1: & I_\nu(x_0) = \varepsilon_\nu x_0, \\ \tau'(\nu) \gg 1: & I_\nu(x_0) = B_\nu(T_e), \end{cases} \\ \text{СИ} \quad & \begin{cases} \tau'(\nu) \ll 1: & I_\nu(x_0) = \varepsilon_\nu x_0, \\ \tau'(\nu) \gg 1: & I_\nu(x_0) = B_\nu(T_{\text{распр}}). \end{cases} \end{aligned} \quad (169)$$

Здесь  $T_{\text{распр}}$  — «температура распределения», т. е. такая температура, которую нужно подставить в множитель Больцмана, чтобы его величина совпадала с значением  $g_k n_i / g_i n_k$ .

### 3. КРИВАЯ РОСТА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО СЛОЯ

При увеличении оптической толщины интенсивность растет пропорционально  $\tau'(\nu)$  до тех пор, пока  $\tau'(\nu) < 1$ . Для  $\tau'(\nu) > 1$  она аппроксимирует функцию источника  $S_\nu$ , так что любое превышение над этой интенсивностью поглощается в плазме.



Ф и г. 1.16. Определение эквивалентной ширины.

Часто больший интерес, чем интенсивность  $I_\nu(x_0)$ , представляют полная интенсивность в линии и полное поглощение в линии. Обе эти величины можно легко измерить вне плазмы. Они определяются соотношениями

$$I_L = \int_{\text{Линия}} I_{\nu, L} d\nu \quad (170)$$

и

$$W_\nu = \int_{\text{Линия}} \frac{I_\nu(0) - I_\nu(x_0)}{I_\nu(0)} d\nu. \quad (171)$$

По поводу определения  $W_\nu$  см. фиг. 1.16. Полное поглощение  $W_\nu$  определяется площадью под линией поглощения в шкале частот. Соответствующие выражения для  $W_\lambda$  и  $W_\omega$  имеют вид

$$W_\lambda \frac{c}{\lambda^2} = W_\nu = W_\omega \frac{1}{2\pi}. \quad (172)$$

Величины  $W_\nu$ ,  $W_\lambda$  или  $W_\omega$  называются «эквивалентной шириной» линии поглощения.

Полная интенсивность и полное поглощение в линии существенно зависят от коэффициента поглощения и длины слоя или от произведения  $n_i f x_0$ . График, который дает зависимость  $W_\nu$  или  $I_L$  от произведения  $n_i f x_0$ , называется «кривой роста». Обычно принято откладывать  $\lg W_\nu$  или  $\lg I_L$  в зависимости от  $\lg (n_i f x_0)$ .

Ниже будет обсуждаться кривая роста для специального случая однородной плазмы в состоянии ЛТР или плазмы с преобладающей ролью столкновений, в которой нет непрерывного испускания и поглощения. Решение уравнения переноса имеет вид [при  $\tau'(\nu) = \kappa'(\nu) x_0$ ]

$$I_\nu(x_0) = I_\nu(0) e^{-\tau'(\nu)} + B_\nu(T) (1 - e^{-\tau'(\nu)}). \quad (173)$$

Для линии испускания [ $I_\nu(0) = 0$ ] имеем<sup>1)</sup>

$$I_L = B_\nu(T) V_\nu. \quad (174)$$

Для линии же поглощения [ $I_\nu(0) > B_\nu(T)$ ]

$$W_\nu = \left[ 1 - \frac{B_\nu(T)}{I_\nu(0)} \right] V_\nu. \quad (175)$$

Здесь  $V_\nu$  дается следующей формулой:

$$V_\nu = \int_{\text{Линия}} (1 - e^{-\tau'(\nu)}) d\nu. \quad (176)$$

Эквивалентные соотношения справедливы и для  $V_\lambda$  и  $V_\omega$ . Таким образом, задача сводится к определению одной из функций  $V_\lambda$ ,  $V_\nu$  или  $V_\omega$ .

Следуя Унзольду [1], проведем расчет для функции  $V_\omega$ . Из (75) и (76) имеем ( $P_\nu = 2\pi P_\omega$ )

$$\tau'(\omega) = \frac{2\pi^2 e_0^2}{m_0 c_0} n_i \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] f x_0 P_\omega. \quad (177)$$

Профиль линии можно представить в совсем простой форме, если линия уширена из-за теплового эффекта Доплера и из-за столкновений с окружающими частицами, которые приводят к дисперсионному профилю. Тогда  $P_\omega$  можно представить в виде свертки доплеровского и дисперсионного профилей. Доплеровский профиль имеет вид

$$P_{\omega, \text{ допл}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \exp\left[-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2\right], \quad (178)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ,  $\Delta\omega_D = (\omega_0/c_0) \sqrt{2kT/m}$ ,  $\omega_0$  — угловая частота в центре линии и  $m$  — масса излучающего атома. Введение  $\Delta\omega$  вместо  $\omega$  преследует главную цель — получить четную функцию. Дисперсионный профиль определяется постоянной затухания  $\gamma$ :

$$P_{\omega, \text{ дисп}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\Delta\omega)^2 + (1/2\gamma)^2}. \quad (179)$$

Из свертки профилей получаем

$$\begin{aligned} P_{\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{дисп}}(\Delta\omega - z) P_{\text{допл}}(z) dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{\alpha^2 + (v-y)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} H(\alpha, v). \end{aligned} \quad (180)$$

Здесь  $z = y\Delta\omega_D$ ,  $v = \Delta\omega/\Delta\omega_D$ ,  $\alpha = 1/2\gamma/\Delta\omega_D$ . Профиль, получающийся при свертке доплеровского и дисперсионного профилей, называется фойгтовским

<sup>1)</sup> Здесь  $T$  обозначает  $T_e$  или  $T_{\text{растр}}$ .

профилем. Функция  $H(\alpha, \nu)$  в (180) есть функция Фойгта. Теперь получаем

$$V_{\omega} = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\tau'(\omega)}) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-\tau'(\Delta\omega)}) d(\Delta\omega), \quad (181)$$

и из (177) и (180) следует

$$\tau'(\Delta\omega) = \frac{2\pi^3/2e_0^3}{m_0c_0} (1 - e^{-h\nu/kT}) \frac{nifx_0}{\Delta\omega_D} H(\alpha, \nu) = CH(\alpha, \nu), \quad (182)$$

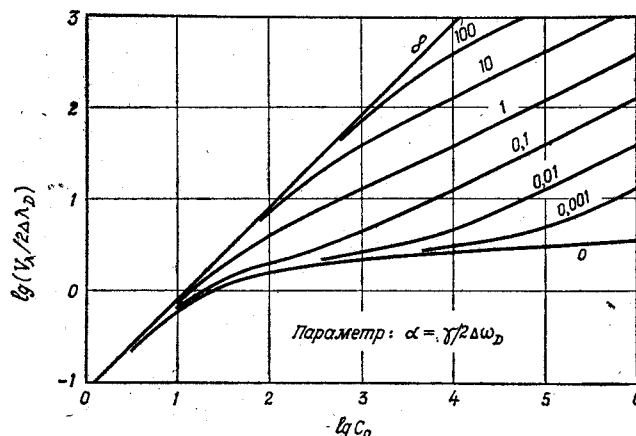
где

$$C = 0,094 \frac{nifx_0}{\Delta\omega_D} (1 - e^{-h\nu/kT}). \quad (183)$$

Подставляя (183) в (181), получаем

$$V_{\omega} = 2\Delta\omega_D \int_0^{\infty} (1 - e^{-CH(\alpha, \nu)}) d\nu. \quad (184)$$

Обычно откладывают логарифм величины  $^{1/2}V_{\omega}/\Delta\omega_D = ^{1/2}V_{\lambda}/\Delta\lambda_D = ^{1/2}V_{\nu}/\Delta\nu_D$  в зависимости от  $\lg C$ , причем  $\alpha$  берется в качестве параметра. На фиг. 1.17 представлено такое семейство кривых роста.



Ф и г. 1.17. Кривые роста для однородного слоя.

$$C_0 = (nifx_0/\Delta\omega_D) [1 - \exp(-h\nu/kT)] = 10,85C.$$

В линейной части оптическая толщина мала [ $\tau'(\nu) < 1$ ] и ветви, отвечающие различным  $\alpha$ , совпадают. Все кривые переходят в прямые линии одинакового наклона; это означает, что интенсивность линии или эквивалентная ширина при достаточно большой оптической толщине в центре линии возрастает пропорционально  $\sqrt{C}$ . Этот факт можно объяснить тем, что при дисперсионном профиле в далеких крыльях линии мы имеем зависимость  $1/\Delta\omega^2$ . В плазме низкого давления и в астрофизической плазме главную роль может играть доплеровское уширение ( $\alpha < 1$ ). В этом случае на кривой роста имеется «уплощение», на котором только центральная часть линии  $\Delta\omega \lesssim \Delta\omega_D$  является оптически толстой.

#### 4. ЭКСТИНКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ

Сечение поглощения  $\sigma_L(\nu)$  или коэффициент поглощения  $\kappa_L(\nu)$ , введенные в § 4, относятся к поглощению фотона в спектральной линии. При этом не указывается, останется ли атом в возбужденном состоянии или воз-

возбуждение будет снято в результате последовательных радиационных или столкновительных процессов. При рассмотрении переноса излучения следует проводить различие между двумя типами процессов, следующих за поглощением фотона в спектральной линии.

1. *Рассеяние.* Атом спонтанно излучает фотон той же самой частоты. Рассеяние есть двухступенчатый процесс, который обладает тем свойством, что частота и направление уходящего (рассеянного) фотона коррелирует с частотой и направлением входящего (поглощенного) фотона. (Такая корреляция будет также иметь место, если возбужденный атом спонтанно «переизлучает» в другую спектральную линию. Переизлучение относится к процессам экстинкции.)

2. *Экстинкция.* Атом теряет свою энергию возбуждения на переизлучение с другой частотой, индуцированное испускание или при столкновении с атомом того рода. К экстинкции также относится и такой процесс, когда возбуждение атома в дальнейшем увеличивается при поглощении или неупругом столкновении.

Состояние ЛТР плазмы, в которой основную роль играют радиационные (или) столкновительные процессы, характеризуется тем, что здесь в большей или меньшей мере преобладают процессы экстинкции, следующие за поглощением. Если после поглощения определяющую роль будут играть некоторые радиационные процессы — особенно рассеяние, — то это приведет к тому, что состояние плазмы будет удаляться от ЛТР. Наоборот, каждый процесс взаимодействия, который меняет энергию или переводит атом в другое состояние, будет способствовать установлению ЛТР.

## 5. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ

Детальный анализ этого явления слишком сложен для описания в этой главе. При исследовании эффектов рассеяния хорошим приближением является двухуровневая модель рассматриваемых атомов, поскольку в лабораторных и астрофизических плазмах рассеяние в основном наблюдается в резонансных линиях. В общем случае коэффициенты испускания и поглощения в плазме, не находящейся в состоянии ЛТР, можно представить в следующем виде:

$$\kappa'(\nu) = \frac{h\nu}{c_0} (n_i B_{ik} P_{\nu}^a - n_k B_{ki} P_{\nu}^{ie}), \quad (185)$$

$$\epsilon_{\nu} = \frac{h\nu}{4\pi} (\mathcal{N}_{\text{столкн}} q P_{\nu}^e + \mathcal{N}_{\text{рад}} q P_{\nu}^{\text{расс}}), \quad (186)$$

где  $\mathcal{N}_{\text{столкн}}$  и  $\mathcal{N}_{\text{рад}}$  — число атомов, которые поступают на верхний уровень при столкновительных и радиационных процессах. Величина  $q$  дает долю атомов, находящихся на верхнем уровне, которые спонтанно излучают в данном направлении. Функция  $P_{\nu}^{\text{расс}}$  есть нормированный профиль, который зависит от интенсивности излучения. Если поле излучения изотропно, то  $\epsilon_{\nu}$  зависит только от направления.

В соответствии с двухуровневой моделью Хаммера [67] формулы (185) и (186) принимают вид

$$\kappa'(\nu) = \frac{h\nu}{c_0} n_i B_{ik} \left(1 - \frac{n_k g_i}{n_i g_k}\right) P_{\nu}^a, \quad (187)$$

$$\epsilon_{\nu} = \frac{h\nu}{4\pi} \left[ n_i n_e K_{i < k}(T_e) q P_{\nu}^e + \frac{4\pi}{c_0} n_i B_{ik} \bar{I} q P_{\nu}^{\text{расс}} \right], \quad (188)$$

где

$$q = \frac{A_{ki}}{A_{ki} + (4\pi/c_0) B_{ki} \bar{I} + n_e K_{k>i}(T_e)}, \quad (189)$$

$$P_v^{\text{расс}} = \frac{4\pi}{\bar{I}} \int \int I_{\nu'} R(\nu', n'; \nu, n) d\nu' d\Omega', \quad (190)$$

$$\bar{I} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu'}(n') P_{\nu'}^a d\nu'; \quad (191)$$

$R$  есть «функция перераспределения» (Хаммер [68]), смысл которой заключается в том, что величина  $R(\nu', n', \nu, n) \Delta\nu \Delta\nu' \Delta\Omega \Delta\Omega'$  дает вероятность того, что поглощенный фотон, находящийся в интервале частот  $\nu' \dots \nu' + \Delta\nu'$  и имеющий направление  $n'$  в элементе телесного угла  $\Delta\Omega'$ , будет излучен в интервале частот  $\nu \dots \nu + \Delta\nu$  с направлением  $n$  в элементе телесного угла  $\Delta\Omega$ . Первая пара аргументов в  $R$  относится к поглощению, а вторая пара — к испусканию. Хаммер приводит следующие соотношения для нормированных профилей испускания и поглощения:

$$P_{\nu'}^e = \int \int \int R(\nu', n'; \nu, n) d\nu' d\Omega' d\Omega, \quad (192)$$

$$P_{\nu}^a = \int \int \int R(\nu, n; \nu', n') d\nu' d\Omega' d\Omega.$$

При записи коэффициента поглощения (187) использовано приближение  $P_{\nu}^a = P_{\nu}^{ie}$ : Это не вполне корректно [67], но этого достаточно почти для всех целей. Кроме того, принимается, что поле излучения не поляризовано.

Здесь не будет обсуждаться структура функции перераспределения  $R$ , которая сильно зависит от механизма уширения линии. Читатель может обратиться к статьям Хаммера [68] и Авретта и Хаммера [69], которые ввели специальную форму функции  $R$  и рассчитали ее для нескольких механизмов уширения.

Решение уравнения переноса (157) с коэффициентами (187) и (188) крайне сложно, потому что коэффициент испускания зависит от интенсивности излучения. Уравнение переноса имеет вид интегро-дифференциального уравнения. Ссылки на дальнейшие и более общие обсуждения этой проблемы были даны в § 1. Недавно эта задача была решена Хёрном [70] для частного случая водородной линии, уширенной из-за эффекта Доплера.

Подставляя  $P_{\nu}^e = P_{\nu}^a$ , можно получить дальнейшее упрощение формулы для коэффициентов (187), что приводит к следующему выражению для функции источника:

$$S_{\nu} = \frac{\varepsilon_{\nu}}{\kappa'(\nu)} = \varepsilon B_{\nu}(T_e) + \frac{4\pi(1-\varepsilon)}{P_{\nu}^a} \int \int I_{\nu'} R(\nu', n'; \nu, n) d\nu' d\Omega'. \quad (193)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{\eta}{1+\eta}, \quad \eta = \frac{n_e K_{k>i}(T_e)}{A_{ki}} (1 - e^{-h\nu/kT_e}). \quad (194)$$

Параметр  $\eta$  в основном характеризует отношение вероятностей столкновительных процессов к вероятностям процессов спонтанного девозбуждения. Из условия  $\eta > 1$  (плазма с преобладающей ролью столкновений) следует, что  $\varepsilon \approx 1$ , или что имеет место ЛТР. В другом случае, при  $\eta < 1$ , излучение атомов, возбужденных при столкновениях, обращается в нуль. Дальнейшее упрощение получается, если ввести изотропное поле излучения. Тогда имеем

$$S_{\nu} = \varepsilon B_{\nu}(T_e) + \frac{1-\varepsilon}{P_{\nu}^a} \int J_{\nu'} R(\nu'; \nu) d\nu'. \quad (195)$$

Если нет корреляции между частотами падающего и излученного фотонов (часто это допущение является удобным нулевым приближением), то для изотропного поля излучения справедливо соотношение

$$R(\nu, \nu') = P_{\nu}^{\alpha} P_{\nu'}^{\alpha} \quad (196)$$

и получаем хорошо известное выражение для  $S_{\nu}$ :

$$S_{\nu} = \epsilon B_{\nu}(T_e) + (1 - \epsilon) \int J_{\nu'} P_{\nu}^{\alpha} d\nu'. \quad (197)$$

Если, наконец, принять, что  $J_{\nu}$  не зависит от частоты, то

$$S_{\nu} = \epsilon B_{\nu}(T_e) + (1 - \epsilon) J_{\nu}, \quad (198)$$

а для  $J_{\nu} = B_{\nu}(T_e)$

$$S_{\nu} = B_{\nu}(T_e).$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Unsöld A., Physik der Sternatmosphären, Berlin, 1955.
2. Aller L. H., Astrophysics, New York, 1963.
3. Амбарцумян В. А., Мустель Е. Р., Северный А. Б., Соболев В. В., Теоретическая астрофизика, М., 1952.
4. Griem H. R., Plasma Spectroscopy, New York, 1964. (См. перевод: Г. Грим, Спектроскопия плазмы, М., 1969).
5. Chandrasekhar S., Radiative Transfer, London, 1950. (См. перевод: С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953.)
6. Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956.
7. Thomas R. N., Some Aspects of Non-Equilibrium Thermodynamics in the Presence of a Radiation Field, Colorado, 1965.
8. Spitzer L., Physics of Fully Ionized Gas, New York, 1956. (См. перевод: Л. Спитцер, Физика полностью ионизированного газа, ИЛ, 1957.)
9. Moore Ch. E., Atomic Energy Levels, Vol. I, II, III, Circular of the Nat. Bur. Stand. 467, Washington, 1949.
10. Herzberg G., Molecular Spectra and Molecular Structure, New York, 1966. (См. перевод: Г. Герцберг, Электронные спектры и строение многоатомных молекул, изд-во «Мир», 1969.)
11. Penner S. S., Quantitative Molecular Spectroscopy and Gas Emissivities, London, 1959. (См. перевод: С. С. Пеннер, Количественная молекулярная спектроскопия и излучательная способность газов, ИЛ, 1963.)
12. Griem H. R., Phys. Rev., 128, 997 (1962).
13. Unsöld A., Zs. Astrophys., 24, 355 (1948).
14. Ecker G., Kröll W., Phys. Fluids, 6, 62 (1963).
15. Griem H. R., Phys. Rev., 131, 1170 (1963).
16. Ecker G., Weizel W., Ann. Phys. Lpz., 17, 126 (1956).
17. Ecker G., Kröll W., Zs. Naturforsch., 21a, 2023 (1966).
18. Burhorn F., Wienecke R., Zs. phys. Chem., 215, 285 (1960).
19. Traving G., Baschek B., Holweger H., Abhandl. Hamburger Sternwarte, 8, 2 (1966).
20. Schlender B., Traving G., Zs. Astrophys., 61, 92 (1965).
21. Bethe H. A., Salpeter E. E., Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Systems, New York, 1957. (См. перевод: Г. Бете, Э. Солпитер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, М., 1960.)
22. Hartree D. G., The Calculation of Atomic Structure, New York, 1957. (См. перевод: Д. Хартри, Расчеты атомных структур, ИЛ, 1960.)
23. Trefftz E., Schlüter A., Dettmar K. H., Jörgens K., Zs. Astrophys., 44, 1 (1957).
24. Schiff B., Pekeris C. L., Phys. Rev., 134, 638 (1964).
25. Bates D. R., Damgaard A., Phil. Trans. London, Ser. A242, 101 (1949).
26. Griem H. R., NRL Report 6085, Washington, 1964.
27. Slater J. C., Quantum Theory of Atomic Structure, Vol. I, II, New York, 1960. (См. перевод: Д. Слэтер, Квантовая теория атомных структур, изд-во «Мир», 1965.)
28. Condon E. M., Shortley G. H., The Theory of Atomic Spectra, London, 1951. (См. перевод: Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949.)
29. Glennon B. M., Wiese W. L., Bibliography on Atomic Transition Probabilities, Washington, 1966.



30. Wiese W. L., Smith M. W., Glennon B. M., Atomic Transition Probabilities, Vol. I, Hydrogen through Neon, Washington, 1966.
31. Finkelburg W., Peters Th., в книге Handbuch der Physik, Bd. XXVIII, Berlin, 1957.
32. Bates D. R., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 106, 432 (1946).
33. Нам F. S., в книге Solid State Physics, Vol. 1, New York, 1955.
34. Burgess A., Seaton M. J., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 120, 121 (1960).
35. Weissler G. L., в книге Handbuch der Physik, Bd. XXI, Berlin, 1956.
36. Weissler G. L., Journ. Quant. Spectr. Radiative Transfer, 2, 383 (1962).
37. Ditchburn R. W., Орик У., в книге Atomic and Molecular Processes, ed. D. R. Bates, New York, 1962. (См. перевод: Атомные и молекулярные процессы, под ред. Д. Бейтса, изд-во «Мир», 1964.)
38. Hasted J. B., Physics of Atomic Collisions, London, 1964. (См. перевод: Д. Хастед, Физика атомных столкновений, изд-во «Мир», 1968.)
39. Kramers H. A., Phil. Mag., 46, 836 (1923).
40. Unsöld A., Ann. Phys. Lpz., 5, Folge, 33, 607 (1938).
41. Gaunt J. A., Proc. Roy. Soc., A126, 654 (1930).
42. Karzas W. J., Latter R., Astrophys. Journ. Suppl., 6, 167 (1961).
43. Биберман Л. М., Норман Г. Э., Оптика и спектроскопия, 8, 433 (1960).
44. Биберман Л. М., Норман Г. Э., Ульянов К. Н., Оптика и спектроскопия, 10, 565 (1961).
45. Schlüter D., Zs. Astrophys., в печати.
46. Schlüter D., Zs. Astrophys., 61, 67 (1964).
47. Jürgens G., Zs. Phys., 134, 21 (1952).
48. Inglis D. R., Teller E., Astrophys. Journ., 90, 439 (1939).
49. Vidal C.-R., Journ. Quant. Spectr. Radiative Transfer, 6, 461 (1966).
50. Chandrasekhar S., Astrophys. Journ., 128, 114 (1958).
51. Geltman S., Astrophys. Journ., 136, 935 (1962).
52. Branscomb L. M., в книге Atomic and Molecular Processes, ed. D. R. Bates, New York, 1962. (См. перевод: Атомные и молекулярные процессы, под ред. Д. Бейтса, изд-во «Мир», 1964.)
53. Bates D. R., Atomic and Molecular Processes, New York, 1962. (См. перевод: Атомные и молекулярные процессы, под ред. Д. Бейтса, изд-во «Мир», 1964.)
54. Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P., Proc. Roy. Soc., Ser., A267, 297 (1962); A270, 155 (1962).
55. Drawin H. W., Zs. Phys., 186, 99 (1965).
56. Drawin H. W., Report EUR-CEV-FC-200, Fontenay-aux-Roses, 1963.
57. Drawin H. W., Zs. Naturforsch., 19a, 1451 (1964).
58. Колесников В. Н., Труды ФИАН СССР, 30, 66 (1964).
59. Richter J., Zs. Astrophys., 61, 57 (1965).
60. McWhirter R. W. P., в книге Plasma Diagnostic Techniques, ed. R. H. Huddelstone, S. L. Leonard, New York, 1965. (См. перевод: Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, изд-во «Мир», 1967.)
61. Wilson R., Journ. Quant. Spectr. Radiative Transfer, 2, 477 (1962).
62. Bond J. W., Phys. Rev., 105, 1683 (1957).
63. Petschek H., Вурон С., Ann. of Phys., 1, 270 (1957).
64. Биберман Л. М., Якубов И. Т., ЖТФ, 8, 294 (1960).
65. Finkelburg W., Маескер Н., в книге Handbuch der Physik, Bd. XXII, Berlin, 1956. (См. перевод: В. Финкельбург, Г. Меккер, Электрические дуги и термическая плазма, ИЛ, 1961.)
66. McWhirter R. W. P., Hearn A. G., Proc. Phys. Soc., 82, 641 (1963).
67. Hummer D. G., Proc. Second Harvard-Smithsonian Conf. on Stellar Atmospheres (The Formation of Spectral Line), Research in Space Science Special Report № 174, Cambridge, Mass., 1965.
68. Hummer D. G., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 125, 21 (1962).
69. Avrett E. H., Hummer D. G., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 130, 295 (1965).
70. Hearn A. G., Proc. Phys. Soc., 88, 171 (1966).
71. Proc. 2nd Harvard-Smithsonian Conf. on Stellar Atmospheres, Cambridge, Mass., 1965.

## УШИРЕНИЕ И СДВИГ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Г. Травинга \*

## § 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теория уширения линий из-за эффектов давления зародилась в 1905 г., когда Лоренц (H. A. Lorentz) рассмотрел задачу о профиле спектральной линии, излучаемой осциллятором, амплитуда колебаний которого подвергается внезапным изменениям, обусловленным неупругими столкновениями осциллятора с возмущающими частицами. Уже из этой простой модели видно, что ширина линии определяется частотой столкновений и, следовательно, плотностью частиц в источнике света. Кроме того, может сказываться и влияние величины тепловой скорости. Таким образом, спектральная линия содержит информацию о физических условиях в том месте, где образуется линия, и она может служить невозмущающим зондом. По этой причине теория уширения линий из-за эффектов давления в течение нескольких десятилетий применялась к астрофизическим проблемам, например для количественного анализа звездных спектров. С 1950 г. физика плазмы стала второй важной областью применения теории уширения линий.

Прежде чем приступить к детальному обсуждению проблемы уширения линий, скажем несколько слов об историческом развитии теории. Упомянутая выше ударная теория Лоренца была пересмотрена еще в рамках классической физики Ленцом [1] и Вайскопфом [2], которые показали, что на уширение линии влияют не только неупругие столкновения (передача энергии), но также и упругие столкновения, которые приводят к сдвигу фазы излученной волны. Статистика таких столкновений была независимо разработана Линдхольмом [3] и Фоли [4].

При описании процесса уширения линий такой подход не является единственно возможным. Штарк [5], Дебай [6] и в особенности Хольцмарк [7] исходили из совершенно другой точки зрения. Они полагали, что возмущающие частицы покоятся в окрестности атома, который излучает возмущенную частоту  $\omega_0 + \Delta\omega$ . Усреднение по ансамблю таких конфигураций дает результирующий профиль линии. Эта статическая теория<sup>1)</sup>, которая является корректным описанием для сильных, медленно меняющихся возмущений, например для электрических полей ионов, была применена Маргенау [8] к случаю вандерваальсовского взаимодействия. Как ударную, так и статическую теории можно рассматривать как предельные случаи более универсальной теории уширения линий, формализм которой в известной мере был развит в статье Андерсона и Толмена [9]. Эта статья в известном смысле завершает развитие всех теоретических моделей, основанных на следующей упрощенной картине: частота гармонического осциллятора, представляющего излучающий атом, возмущается так, что возмущение  $\Delta\omega$  обратно пропорционально определенной степени расстояния до возмущающей частицы. Краткий обзор математических методов, используемых в этих теориях, дается в § 2 этой главы.

Приблизительно с 1940 г. для расчета взаимодействия между излучающим атомом и возмущающей частицей стали использоваться квантовомеханические методы; кроме того, их использовали и для того, чтобы уточнить

\* G. T r a v i n g, Sternwarte, Hamburg.

1) Раньше она часто называлась статистической теорией.

само понятие соударения. Стало очевидным, что необходимо учитывать неупругие столкновения с передачей энергии к излучающей частице или от нее, которые, следовательно, предопределяют прекращение излучения в рассматриваемой линии. Эти квантовомеханические теории будут обсуждаться в § 3.

В § 4 рассмотрены специальные приложения.

## § 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Атомный коэффициент поглощения в спектральной линии дается выражением

$$\kappa(\Delta\omega) = \frac{\pi e^2}{mc} f N_m \frac{P(\Delta\omega)}{2\pi}, \quad (1)$$

где  $f$  — сила осциллятора,  $N_m$  — заселенность уровня  $m$ ,  $\Delta\omega$  — расстояние от центра линии (в единицах угловой частоты).

Принимают, что профиль линии нормирован

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\Delta\omega) d(\Delta\omega) = 1. \quad (2)$$

В дальнейшем будет рассматриваться только расчет профиля линии  $P(\Delta\omega)$ . Тот факт, что  $P(\Delta\omega)$  является функцией с конечной шириной, а не  $\delta$ -функцией Дирака, как это должно было быть в случае перехода между невозмущенными энергетическими уровнями, обусловлен тремя основными причинами:

- 1) взаимодействием атома с полем излучения, что приводит к радиационному затуханию осциллятора и к естественной ширине линии;
- 2) тепловым движением атома, что приводит к доплеровскому уширению;
- 3) взаимодействием атома с окружающими частицами, что приводит к уширению линии из-за эффектов давления.

### 2. РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ

Радиационное затухание обусловлено тем, что, согласно уравнениям Максвелла, частица, движущаяся с ускорением, теряет энергию на излучение:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} (\ddot{x})^2. \quad (3)$$

Для осциллятора можно считать, что эта потеря энергии обусловлена силой лучистого трения  $f_{\text{тр}}$ :

$$f_{\text{тр}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x} = -\frac{2e^2}{3c^3} \omega_0^2 \dot{x}, \quad (4)$$

так как среднее значение работы этой силы равно средней потере электромагнитной энергии:

$$\dot{x}f = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{x} \ddot{x} = \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \frac{d}{dt} (\dot{x} \ddot{x}) - (\ddot{x})^2 \right\} = -\frac{2e^2}{3c^3} (\ddot{x})^2. \quad (5)$$

Поскольку сила  $f_{\text{тр}}$  пропорциональна скорости, мы получаем следующее уравнение движения затухающего осциллятора:

$$\ddot{x} - \frac{f_{\text{тр}}}{m} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6)$$

с постоянной затухания

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}. \quad (7)$$

Решение уравнения (6) в предположении, что  $\gamma \ll \omega_0$ , которое обычно выполняется, имеет вид

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t + i\omega_0 t\right). \quad (8)$$

Фурье-преобразование соответствующей затухающей волны дает амплитуду

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1/2\gamma + i(\omega - \omega_0)}, \quad (9)$$

которая приводит к так называемому лоренцевскому, или дисперсионному, профилю для интенсивности

$$P(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1/2\gamma}{(\Delta\omega)^2 + (1/2\gamma)^2}. \quad (10)$$

Этот вид профиля часто встречается в теории уширения линий. Для радиационного затухания (полная) полуширина линии в шкале длин волн не зависит от  $\lambda$ :

$$\Delta\lambda_n = \frac{2\pi c\gamma}{\omega_0^2} = \frac{4\pi e^2}{3mc^2} = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}. \quad (11)$$

Эта естественная ширина линии почти всегда меньше, чем доплеровская ширина или ширина, обусловленная эффектами давления.

С точки зрения квантовой механики радиационное затухание обусловлено тем, что из-за взаимодействия с полем излучения время жизни энергетических уровней оказывается конечным, и, следовательно, эти уровни уширяются в соответствии с принципом неопределенности. Постоянная затухания  $\gamma_m$  для уровня  $m$  зависит от среднего времени жизни этого уровня  $\tau$  и определяется по формуле  $\gamma_m = \tau^{-1}$ ; с другой стороны,  $\tau^{-1}$  пропорционально сумме вероятностей для всех переходов с уровня  $m$ :

$$\gamma_m = \sum_n A_{nm} + \sum_n B_{nm}u_\nu + \sum_n B_{n'm}u_\nu. \quad (12)$$

Спонтанное                      Индуцированное                      Поглощение  
излучение                      излучение

Здесь  $u_\nu$  — плотность энергии поля излучения,  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $B_{n'm}$  — эйнштейновские вероятности переходов. В случае термодинамического равновесия это выражение можно упростить:

$$\gamma_m = \sum_n \frac{A_{nm}}{1 - \exp(-h\nu/kT)} + \sum_{n'} \frac{g_{n'}}{g_m} \frac{A_{mn'}}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (13)$$

Уширение обоих уровней, начального  $m$  и конечного  $n$ , можно рассматривать независимо; поэтому профиль линии получается комбинированием уширений обоих уровней просто путем свертки их дисперсионных профилей. Это соответствует перемножению экспонент, которые являются преобразованными по Фурье профилями линии

$$e^{-\gamma_m t} e^{-\gamma_n t} = e^{-(\gamma_m + \gamma_n)t}. \quad (14)$$

В результате получаем экспоненту той же структуры, так что профиль линии остается дисперсионным с постоянной затухания

$$\gamma = \gamma_m + \gamma_n. \quad (15)$$

Если возможны переходы с большой вероятностью на нижние уровни, то квантовая теория дает значения  $\gamma$ , в 10 и более раз превышающие значения классической теории.

## 3. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

В последующем изложении атом будет рассматриваться как осциллятор, который излучает частоту  $\omega_0$  в собственной системе координат. Тепловое движение атома, так же как и временные возмущения, обусловленные, например, столкновениями с частицами, вызывают смещение частоты  $\Delta\omega(t)$  в лабораторной системе координат. В интервале времени  $(0, \dots, t)$  из-за этих эффектов появляется дополнительный сдвиг фазы:

$$\eta(t, 0) = \int_0^t \Delta\omega(t') dt'. \quad (16)$$

В этом случае наблюдаемое колебание имеет вид

$$f(t) = \exp[i\omega_0 t + i\eta(t, 0)]. \quad (17)$$

Если  $a(\omega)$  есть спектр амплитуд:

$$a(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (18)$$

то распределение энергии в спектре дается выражением

$$P(\omega) = a^*(\omega) a(\omega). \quad (19)$$

Здесь звездочкой обозначена комплексно сопряженная амплитуда. Эти хорошо известные соотношения малополезны при расчете профиля линии в реальных случаях, поскольку  $\Delta\omega(t)$  есть случайная переменная, так что известны только статистические свойства  $f(t)$ .

Винер [10] и Хинчин [11] независимо показали, что  $P(\Delta\omega)$  и автокорреляционная функция  $\phi(s)$ , определяемая соотношением<sup>1)</sup>

$$\phi(s) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} f^*(t) f(t+s) dt}{\int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} f^*(t) f(t) dt} e^{-i\omega_0 s} = \langle e^{i\eta(t+s, t)} \rangle, \quad (20)$$

представляют собой функции, взаимно преобразованные по Фурье, так что спектр мощности имеет вид

$$P(\Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) e^{-i\Delta\omega s} ds. \quad (21)$$

Качественное описание свойств функции  $\phi(s)$  можно получить из анализа формул (20) и (21). Из (20) следует, что

$$\phi(0) = 1, \quad (22)$$

а из того, что  $P(\Delta\omega)$  является действительной функцией, получаем

$$\phi(-s) = \phi^*(s). \quad (23)$$

Поэтому (21) можно заменить выражением

$$P(\Delta\omega) = \text{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(s) e^{-i\Delta\omega s} ds. \quad (24)$$

<sup>1)</sup> Множитель  $\exp(-i\omega_0 s)$  включен только для удобства. Он приводит к сдвигу начала координат (в шкале частот) в точку  $\omega_0$ .

Рассмотрим несколько простых случаев. Если мы запишем  $\phi(s)$  в виде

$$\phi(s) = e^{-R(s) - iJ(s)}, \quad (25)$$

разложим обе функции  $R$  и  $J$  в ряды и примем во внимание, что  $\phi(0) = 1$ , то получим

$$\phi(s) = \exp(-a_1 s - a_2 s^2 \dots - ib_1 s - ib_2 s^2 \dots). \quad (26)$$

Оставляя только члены, линейные по  $s$ , имеем

$$P(\Delta\omega) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp[-a_1 s - i(b_1 + \Delta\omega)s] ds = \frac{1}{\pi} \frac{a_1}{(b_1 + \Delta\omega)^2 + a_1^2}. \quad (27)$$

Это — дисперсионный профиль с центром линии, сдвинутым на  $-b_1$ . Сдвиг и в более общем случае асимметрия всегда обусловлены мнимой частью функции  $\phi(s)$ .

Оставим теперь только квадратичный член  $a_2$ ; тогда

$$P(\Delta\omega) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-a_2 s^2 - i\Delta\omega s) ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi a_2}} \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{4a_2}\right). \quad (28)$$

Это — гауссовский профиль.

Наконец, если мы оставим  $a_1$  и  $a_2$ , то получим выражение

$$P(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \exp(-a_1 s - a_2 s^2) \cos \Delta\omega s, \quad (29)$$

которое можно преобразовать к следующему виду:

$$P(\Delta\omega) = \frac{1}{2\pi \sqrt{a_2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\alpha x - \frac{1}{4} x^2\right) \cos vx dx = \frac{1}{2 \sqrt{\pi a_2}} H(\alpha, v), \quad (30)$$

где

$$\alpha = \frac{a_1}{2 \sqrt{a_2}}, \quad v = \frac{\Delta\omega}{2 \sqrt{a_2}}.$$

Таким образом, мы ввели известную функцию Фойгта

$$H(\alpha, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\alpha x - \frac{1}{4} x^2\right) \cos vx dx, \quad (31)$$

которая играет главную роль при описании профилей уширенных линий. Воспользовавшись тем обстоятельством, что свертка двух функций соответствует умножению их фурье-преобразований, мы приходим к выводу, что  $H(\alpha, v)$  должна быть результатом свертки дисперсионной функции с функцией Гаусса. Действительно, функцию  $H(\alpha, v)$  можно определить следующим образом:

$$H(\alpha, v) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{\alpha^2 + (v-y)^2} dy. \quad (32)$$

Дальнейшие сведения о  $H(\alpha, v)$  приведены в § 5.

#### 4. ДОПЛЕРОВСКОЕ УШИРЕНИЕ

Доплеровское уширение рассчитывают обычно следующим образом. Пусть  $W(v)$  — нормированное распределение атомов по скоростям вдоль луча зрения. Объединяя это распределение с соотношением, связывающим сдвиг частоты из-за эффекта Доплера со скоростью  $v$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c}, \quad (33)$$

мы сразу приходим к выражению

$$P(\Delta\omega) = W \left( c \frac{\Delta\omega}{\omega} \right) \frac{\omega}{c}. \quad (34)$$

Если распределение по скоростям является максвелловским, то

$$P(\Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_0} \exp \left( -\frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega_0^2} \right), \quad (35)$$

где

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega}{c} v_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (36)$$

Мелкомасштабную турбулентность (микротурбулентность) можно приближенно учесть, сложив квадрат тепловой скорости  $2RT/\mu$  и средний квадрат турбулентной скорости.

Если рассмотреть эту же задачу методом корреляционных функций [12, 13], то легко установить границы применимости излагаемой статической теории, в которой движение каждого атома предполагается равномерным. Будем исходить из функции  $\phi(s)$ :

$$\phi(s) = \langle \exp \{i\eta(t+s, t)\} \rangle = \left\langle \exp \left( i \frac{\omega}{c} \sum_j v_j s_j \right) \right\rangle. \quad (37)$$

Примем, что: 1) за время свободного пробега  $s_j$  скорость  $v_j$  не меняется, 2) скорости до и после газокинетического столкновения являются статистически независимыми и, наконец, 3) эти столкновения не приводят к фазовым сдвигам. Проблема газокинетических столкновений, приводящих к фазовым сдвигам, была рассмотрена в [14].

Легко оценить выражение (37) в двух предельных случаях.

1) Если  $s \ll \tau$  (здесь  $\tau$  — среднее время свободного пробега), то вероятностью столкновения в интервале времени  $s$  можно пренебречь. Следовательно,

$$\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\left( \frac{v}{v_0} \right)^2 + i \frac{\omega v}{c} s \right] dv = \exp \left( -\frac{1}{4} \Delta\omega_0^2 s^2 \right) \quad (38)$$

и  $P(\Delta\omega)$  дается формулой (35).

Условием применимости этой статической теории является выполнение неравенства  $s \ll \tau$  или  $\Delta\omega \gg \tau^{-1}$ . Если мы используем связь между сдвигом частоты и скоростью при эффекте Доплера, то получим

$$2\pi l \gg \lambda. \quad (39)$$

Это неравенство означает, что длина волны линии должна быть меньше  $l = v\tau$  — средней длины свободного пробега между двумя газокинетическими столкновениями. Эти условия почти всегда выполняются для переходов в оптической области, если только плотность частиц в источнике не слишком высока. Это может, однако, оказаться несправедливым для микроволн, где часто сталкиваются с обратным случаем.

2)  $s \gg \tau$ . Если за время  $s$  происходит много столкновений, то смещение вдоль луча зрения

$$\sum_j v_j s_j = \Delta x(s) \quad (40)$$

следует рассчитывать с помощью теории диффузии. В соответствии с этой теорией вероятность смещения на  $\Delta x$  за время  $s$  дается формулой

$$W(\Delta x, s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Ds}} \exp \left( -\frac{\Delta x^2}{4Ds} \right), \quad (41)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии. Тогда

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Ds}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{4Ds} - i\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x\right) d\Delta x = \\ &= \exp\left(-\frac{4\pi Ds}{\lambda^2}\right) = \exp\left(-\frac{\omega^2 Ds}{c^2}\right)\end{aligned}\quad (42)$$

и

$$P(\Delta\omega) = \frac{\omega^2 D/c^2}{\pi [\Delta\omega^2 + (\omega^2 D/c^2)^2]} \quad (43)$$

Отсюда следует, что при  $\lambda \gg l$  уширение линии определяется скоростью диффузии; профиль же линии дисперсионный. Полуширина линии оказывается гораздо меньшей, чем полуширина соответствующего гауссовского профиля, который получается, когда применима статическая теория в первом варианте. Этот эффект сужения линии, известный как «столкновительное сужение», пропорционален отношению тепловой скорости к скорости диффузии.

##### 5. УШИРЕНИЕ ИЗ-ЗА ЭФФЕКТОВ ДАВЛЕНИЯ, ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

Основным источником уширения линии является взаимодействие излучающего атома с окружающими частицами, которое обуславливает возмущение частоты и, следовательно, дополнительный сдвиг фазы  $\eta(t+s, t)$  в интервале времени  $t, \dots, t+s$ . Этот сдвиг фазы, как правило, считается действительной величиной, что справедливо, если при взаимодействии нет передачи энергии к возмущающим частицам. Величина  $\eta(t+s, t)$  может быть комплексной в случае неупругих столкновений, которые приводят к изменению амплитуды осциллятора. Мы будем считать (если явно не оговаривается противное), что функция  $\eta(t+s, t)$  действительна.

Другая проблема вытекает из того обстоятельства, что в общем случае сдвиг фазы является результатом взаимодействия со многими возмущающими частицами. Это усложняет ситуацию, особенно в тех случаях, когда различные возмущающие частицы действуют одновременно, потому что становится возможной взаимная интерференция возмущений. Эта интерференция различна для различных типов взаимодействия. С этой точки зрения очень простым является случай взаимодействия Ван-дер-Ваальса, когда излучающий атом окружен нейтральными атомами другого газа. Здесь возмущения и, следовательно, сдвиги фаз, обусловленные различными возмущающими частицами, складываются скалярно.

В других случаях возмущающие поля складываются векторно, и таким же путем складываются возмущения, если они линейно зависят от полей, как в случае линейного эффекта Штарка. Квадратичный эффект Штарка зависит от квадрата суммы полей. Наконец, имеются взаимодействия, для которых не существует простой схемы суперпозиции, как, например, резонансное взаимодействие между одинаковыми атомами.

Во всех статических теориях уширения из-за эффектов давления, в которых можно пренебречь движением возмущающих частиц, возникает эта проблема суперпозиции. Ее можно избежать только в так называемом «приближении ближайшего соседа», в котором учитывается только взаимодействие с ближайшей возмущающей частицей.

Проблема суперпозиции не возникает и в том случае, если движущиеся возмущающие частицы действуют одна за другой только во время их наибольшего сближения с излучающим атомом. Это приводит к столкновительной или ударной теории. Линдхольм [15] и Фоли [4] независимо использовали это допущение при расчете  $P(\Delta\omega)$ . Их результаты подтверждены



Маргенау и Ландвером <sup>1)</sup> и Собельманом [13]; последний для решения этой задачи использовал метод автокорреляционных функций.

Легко развить теорию для не взаимодействующих возмущений, которые складываются скалярно. Тогда фазовые сдвиги, обусловленные отдельными возмущающими частицами  $j$  в интервале времени  $t, \dots, t + s$ , взаимно независимы, и мы получаем

$$\phi(s) = \langle \exp \{ i \sum_{nV} \eta_j(t+s, t) \} \rangle = \langle \prod_{nV} \exp \{ i \eta_j(t+s, t) \} \rangle. \quad (44)$$

Здесь  $nV$  — полное число частиц в объеме  $V$ . Если, кроме того, частицы не взаимодействуют друг с другом, то среднее значение для каждой частицы  $j$  не зависит от всех других, и из (44) следует выражение

$$\phi(s) = \langle \exp \{ i \eta_j(t+s, t) \} \rangle^{nV}, \quad (45)$$

которое можно записать в виде

$$\phi(s) = e^{-nV p(s)}, \quad (46)$$

если ввести объем возмущения

$$V_p(s) = -V \ln \langle \exp \{ i \eta_j(t+s, t) \} \rangle. \quad (47)$$

Так как функция

$$\langle \exp \{ i \eta_j(t+s, t) \} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \exp \left\{ i \int_t^{t+s} \Delta \omega [r_j(t')] dt' \right\} dV \quad (48)$$

очень близка к 1, поскольку крайне маловероятно, чтобы фиксированная частица  $j$  была близка к излучающему атому в течение временного интервала  $t, \dots, t + s$ , то мы можем пренебречь всеми членами высших порядков и записать

$$V_p(s) = V \langle 1 - \exp \{ i \eta_j(t+s, t) \} \rangle. \quad (49)$$

Это уравнение является исходным в обобщенной теории уширения из-за эффектов давления Андерсона и Толмена [9]. Проведенное выше рассмотрение показывает, что корреляционная функция является экспонентой, в показателе которой стоит число возмущающих частиц в объеме возмущения  $V_p(s)$ , который растет при увеличении  $s$ , начиная с  $V_p(0) = 0$ .

## 6. УДАРНАЯ ТЕОРИЯ

Выишем теперь те допущения, которые приняты в ударной теории

а) Вклад в  $\eta(t+s, t)$  дают только те возмущающие частицы  $j$ , которые пролетают мимо излучающего атома в интервале времени  $t, \dots, t + s$  с прицельным параметром  $\rho$ . Следовательно, не нужно учитывать частицы, пролетающие на расстояниях, больших  $vs$ .

б) Величина  $\eta_j(t+s, t)$  заменяется на фазовый сдвиг  $\eta(\rho)$ , обусловленный полным столкновением с предельным параметром  $\rho$ . Конечно,  $\eta(\rho)$  зависит также и от скорости  $v$ .

При этих допущениях, пренебрегая распределением скоростей, получаем следующее выражение для  $V_p(s)$ :

$$V_p(s) = sv \int_0^{\infty} (1 - e^{i\eta(\rho)}) 2\pi\rho d\rho = sv(\sigma_r - i\sigma_i). \quad (50)$$

Объем возмущения есть объем цилиндра с комплексным поперечным сечением  $(\sigma_r - i\sigma_i)$  и длиной  $vs$ . Линейная зависимость  $V_p(s)$  от  $s$  типична для ударной теории.

<sup>1)</sup> H. Margenau, G. W. Landwehr, New Haven, Yale University, 1958.

Отсюда получаем дисперсионный профиль со сдвигом

$$P(\Delta\omega) = \frac{nv\sigma_r}{\pi [(\Delta\omega - nv\sigma_t)^2 + (nv\sigma_r)^2]}, \quad (51)$$

где полная полуширина (постоянная затухания) равна

$$\gamma = 2nv\sigma_r. \quad (52)$$

Величина сдвига определяется формулой

$$\Delta\omega_s = nv\sigma_t. \quad (53)$$

Для расчета сечений следует сделать предположение о типе взаимодействия и о траектории возмущающей частицы. Используя для зависимости сдвига частоты от расстояния обратную степенную зависимость

$$\Delta\omega(r) = \frac{C_p}{r^p}. \quad (54)$$

и предположение о прямолинейном движении возмущающей частицы, легко находим

$$\eta(\rho) = \frac{\alpha_p C_p}{v\rho^{p-1}}, \quad (55)$$

где

$$\alpha_p = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma[1/2(p-1)]}{\Gamma(1/2p)}. \quad (56)$$

Наиболее важными типами взаимодействия являются следующие:

1) линейный штарк-эффект

$$p = 2, \quad \alpha_2 = \pi;$$

2) резонансное взаимодействие между одинаковыми частицами или взаимодействие между заряженными возмущающими частицами и квадруполем

$$p = 3, \quad \alpha_3 = 2;$$

3) квадратичный штарк-эффект

$$p = 4, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}\pi;$$

4) взаимодействие Ван-дер-Ваальса

$$p = 6, \quad \alpha_6 = \frac{3}{8}\pi.$$

Для случаев  $p = 3, 4, 6$  вычисление сечений

$$\sigma_r = 2\pi \int_0^\infty [1 - \cos \eta(\rho)] \rho d\rho = 4\pi \int_0^\infty \sin^2 \frac{1}{2} \eta(\rho) \rho d\rho \quad (57)$$

и

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^\infty \sin \eta(\rho) \rho d\rho \quad (58)$$

можно провести аналитически.

Для случаев  $p = 4, 6$  Йенсен [17] получил следующий результат:

$$\sigma_r - i\sigma_t = \pi \alpha_p^{2/(p-1)} i^{-2/(p-1)} \Gamma\left(\frac{p-3}{p-1}\right) \left(\frac{C_p}{v}\right)^{2/(p-1)}. \quad (59)$$

Для  $p = 3$  интегрирование выполнил Линдхольм [15].

Рассмотрение случая  $p = 2$ , который отвечает закону взаимодействия между атомами с вырождением по угловому моменту и заряженными частицами, требует видоизменения теории, поскольку диполь-монопольное взаимодействие не является более сферически симметричным. Колб в своей диссертации [18] показал, что только сильные столкновения, т. е. такие столкновения, которые приводят к большим фазовым сдвигам излучаемой волны, могут изменить ориентацию диполя (т. е. возмущаемого атома), тогда как при слабых столкновениях ориентация остается фиксированной в поле ионов, которое не меняется во время столкновения. В предположении о прямолинейном движении возмущающей частицы и постоянстве скорости сдвиг фазы для слабых столкновений имеет вид

$$\eta_{\omega} = \frac{2C_2}{\rho v} \cos \Theta = \eta'(\rho) \cos \Theta. \quad (60)$$

Здесь  $C_2$  — постоянная взаимодействия для диполя, направленного на возмущающую частицу,  $\Theta$  — угол между направлением диполя и прямой, проходящей через возмущенный атом перпендикулярно траектории возмущающей частицы. Этот сдвиг фазы, который является функцией  $\rho$  и  $\Theta$ , следует ввести в формулу (50), в которой нужно провести дополнительное усреднение по всем ориентациям диполя:

$$\sigma_r - i\sigma_i = \int_0^{\rho_{\max}} 2\pi\rho d\rho \int_{\Omega} \frac{d\Omega}{4\pi} (1 - \exp\{i\eta'(\rho) \cos \Theta\}). \quad (61)$$

Здесь впервые мы видим, что мнимая часть сечения равна нулю, и, следовательно, линия не имеет сдвига. Это объясняется тем, что в данном случае слабые столкновения не дают вклада в  $\sigma_i$ , так как положительные и отрицательные значения  $\cos \Theta$  равновероятны.

Интеграл необходимо обрезать на максимальном расстоянии  $\rho_{\max}$ , поскольку в противном случае он разойдется из-за дальнедействующего характера кулоновских сил. Естественно, что здесь имеется некоторый произвол в подходящем выборе этого расстояния. Обычно используют дебаевский радиус:

$$\rho_{\max} = D, \quad (62)$$

т. е. расстояние  $D$  [см. формулу (101)], на котором кулоновское поле заряженной частицы начинает экранироваться вследствие того, что вероятность найти в ее окрестности частицы противоположного знака возрастает. Если интегрирование в (61) проводить, следуя Колбу, от  $\rho_{\min}$ , определяемого условием  $\eta(\rho_{\min}) = 1$ , до  $\rho_{\max}$ , согласно (62), то для вклада слабых столкновений имеем

$$\sigma_{r, w} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{C_2}{v}\right)^2 \left\{ -\frac{1}{40} - \ln \eta'(\rho_{\max}) + \frac{1}{40} [\eta'(\rho_{\max})]^2 + \dots \right\}. \quad (63)$$

Примем, что все столкновения внутри радиуса  $\rho_{\min}$  дают эффективный вклад в уширение линии, обусловленное сильными столкновениями

$$\sigma_{r, s} = \pi \rho_{\min}^2 = 4\pi \left(\frac{C_2}{v}\right)^2. \quad (64)$$

Тогда

$$\sigma_r = \sigma_{r, w} + \sigma_{r, s} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{C_2}{v}\right)^2 \left\{ 3 - \frac{1}{40} - \ln \eta'(\rho_{\max}) + \frac{1}{40} [\eta'(\rho_{\max})]^2 + \dots \right\}. \quad (65)$$

Наконец, в случае максвелловского распределения возмущающих частиц по скоростям<sup>1)</sup> получаем выражение для постоянной затухания (членом  $^{1/2} \omega [\eta'(\rho_{\max})]^2$  пренебрегаем)

$$\gamma = \langle 2\nu\sigma_r \rangle = n \frac{32}{3} \frac{C_1}{\langle v \rangle} \left( 2,566 - \ln \frac{2C_2}{\langle v \rangle \rho_{\max}} \right). \quad (66)$$

Результаты, полученные в этой главе, представлены в табл. 2.1, за исключением сингулярного случая  $p = 2$ . Видно, что отношение ширины к сдвигу зависит только от типа взаимодействия и не зависит от плотности или скорости возмущающих частиц.

Таблица 2.1

Уширение и сдвиг линии, согласно ударной теории Линдхольма—Фоли

$p$	3	4	6
$\gamma$	$2\pi^2 C_3 n$	$11,37$	$8,08$
$\Delta\omega_s$	—	$9,94$	$2,94$
$\gamma/\Delta\omega_s$	—	$1,16$	$2,75$
		$\left. \begin{matrix} 11,37 \\ 9,94 \\ 1,16 \end{matrix} \right\} \cdot C_4^{2/3} v^{1/3} n$	$\left. \begin{matrix} 8,08 \\ 2,94 \\ 2,75 \end{matrix} \right\} \cdot C_6^{2/5} v^{2/5} n$

Здесь следует сделать одно дополнительное замечание. Если определить так называемый радиус Вайскопфа  $\rho_W$  условием  $\eta(\rho_W) = 1$ , т. е.

$$\rho_W = \left( \frac{\alpha_p C_p}{v} \right)^{1/(p-1)}, \quad (67)$$

то, анализируя (57) и (58), интересно отметить, что уширение в основном обусловлено столкновениями с  $\rho \ll \rho_W$ , тогда как сдвиг линии обусловлен большим числом слабых столкновений с  $\rho \gg \rho_W$ . Это показано на фиг. 2.1 для случая  $p = 4$ .

В заключение найдем область применимости теории, проанализировав допущения, сделанные в начале этого пункта.

а) Предполагается, что полное время столкновений  $s$ ; это означает, что результаты справедливы, если  $s$  больше среднего времени столкновения:

$$s > \frac{\rho_W}{v}. \quad (68)$$

Отсюда следует, что ударная теория определяет только внутреннюю часть профиля линии. Соответствующее ограничение имеет вид [19]

$$\Delta\omega_H = \frac{v}{\rho_W}. \quad (69)$$

<sup>1)</sup> Полезны следующие расчетные формулы для средних по максвелловскому распределению:

$$\langle v^n \rangle = \frac{(n+2)!}{2^{n+1} [1/2(n+2)]!} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2n} \quad \text{для } n > -3,$$

особенно

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{8} \pi \langle v \rangle^2 = 1,178 \langle v \rangle^2, \quad \langle v^3/s \rangle = 0,891 \langle v \rangle^3/s,$$

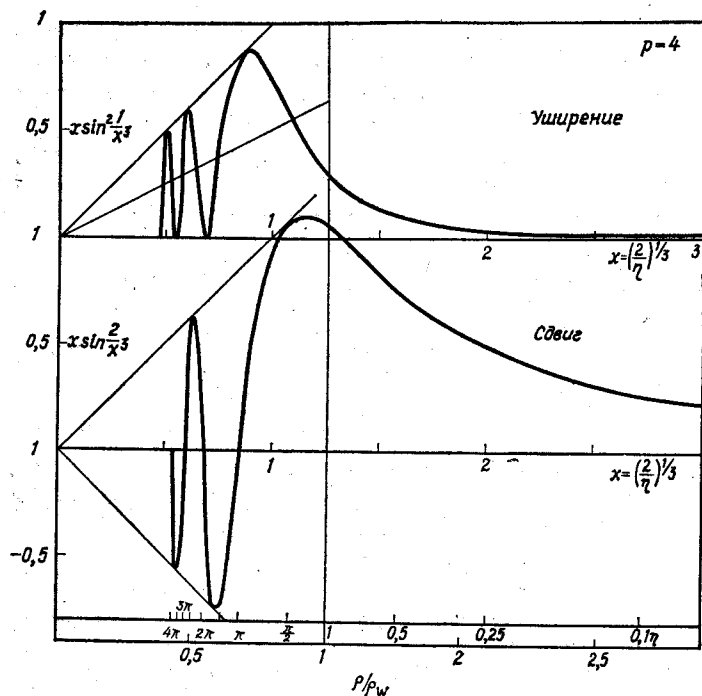
$$\langle v^{1/3} \rangle = 0,979 \langle v \rangle^{1/3}, \quad \langle v^{-1} \rangle = \frac{4}{\pi} \langle v \rangle^{-1} = 1,273 \langle v \rangle^{-1}$$

и

$$\left\langle \frac{\ln v}{v} \right\rangle = (\ln \langle v \rangle = 0,409 \cdot 1,273 \langle v \rangle^{-1}.$$

Крылья линии ( $\Delta\omega \gg \Delta\omega_H$ ) можно приближенно описывать статической теорией.

б) Требуется, чтобы фазовые сдвиги, обусловленные различными возмущающими частицами в интервале  $t, \dots, t + s$ , были взаимно независимы. Это условие означает, что, за исключением случая скалярных аддитивных



Ф и г. 2.1. Вклад столкновений со сдвигом фазы (прицельный параметр  $p$ ) в уширение и сдвиг линии.

Фазовый сдвиг  $\eta$  как функция  $p$  рассчитан для случая  $p = 4$  (квадратичный эффект Штарка).

возмущений, крайне маловероятно, чтобы в одно и то же время произошло два или более столкновений. Это определяет верхнюю границу для плотности возмущающих частиц:

$$\eta p_w^2 \ll 1. \quad (70)$$

Можно показать, что если это условие выполнено, то  $P(\Delta\omega)$  практически равно нулю для  $\Delta\omega > \Delta\omega_H$  и наоборот.

## 7. СТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, ПРИБЛИЖЕНИЕ БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА

В ударном приближении считается, что излучающая частица большую часть времени вообще не испытывает возмущения, и только в короткие времена столкновений она взаимодействует с одной частицей. Это приближение является хорошим, пока плотность возмущающих частиц мала [см. (70)]. В случае больших плотностей следует рассмотреть другую формулировку проблемы, в которой учитывается одновременное взаимодействие со многими частицами. Однако очень часто мы вправе пренебречь движением частиц. В простейшей статической теории, в которой снимаются все проблемы суперпозиции, принимается, что возмущение  $\Delta\omega$  обусловлено только «ближайшим соседом».

Эта теория является разумным приближением, потому что только те несколько частиц, которые находятся достаточно близко к излучающему

атому, будут оказывать какое-либо воздействие, и, возможно, имеет смысл рассмотреть взаимодействие только с ближайшей частицей. Пусть  $n$  обозначает плотность частиц, тогда

$$W_+(dV) = n dV. \quad (71)$$

есть вероятность того, что одна частица находится в элементе объема, и

$$W_-(dV) = 1 - n dV \quad (72)$$

есть вероятность того, что в этом элементе объема нет ни одной частицы. Для конечного объема  $V$  соответствующая вероятность имеет вид

$$W_-(V) = \prod_{V/dV} W_-(dV) = (1 - n dV)^{V/dV} = e^{-nV}. \quad (73)$$

Так, вероятность того, что в интервале  $r, \dots, r + dr$  находится одна возмущающая частица, а на расстоянии, меньшем  $r$ , нет ни одной частицы, определяется выражением

$$W(r) dr = W_-\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) W_+(4\pi r^2 dr) = \exp\left(-\frac{4}{3}\pi r^3 n\right) n 4\pi r^2 dr. \quad (74)$$

Вводя  $\Delta\omega = C_p r^{-p}$  и нормальный сдвиг  $\Delta\omega_0$ , соответствующий среднему расстоянию между частицами

$$\Delta\omega_0 = C_p r_0^{-p} = C_p \left(\frac{4}{3}\pi n\right)^{1/3p}, \quad (75)$$

получаем следующее выражение для профиля линии:

$$P(\Delta\omega) = \frac{3}{p} \left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{(p+3)/p} \exp\left[-\left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{3/p}\right] \frac{1}{\Delta\omega_0}. \quad (76)$$

Очень часто эта простая формула оказывается достаточно точной.

## 8. СТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Удобно обсудить расчет профиля линии для различных типов взаимодействия по отдельности. Простейшим примером взаимодействия со скалярным законом сложения является взаимодействие Ван-дер-Ваальса,  $p = 6$ , впервые рассмотренное Маргенау [8].

Исходя из (46), (48) и (49), рассчитаем  $V_p(s)$  в статическом приближении, т. е. примем, что частицы покоятся. Тогда  $\Delta\omega_0$  есть постоянная величина, зависящая от расстояния между излучающей и возмущающей частицами. Вводя наиболее удобные в этом случае сферические координаты, получаем

$$V_p(s) = 4\pi \int_0^\infty (1 - \exp(iC_p r^{-p}s)) r^2 dr. \quad (77)$$

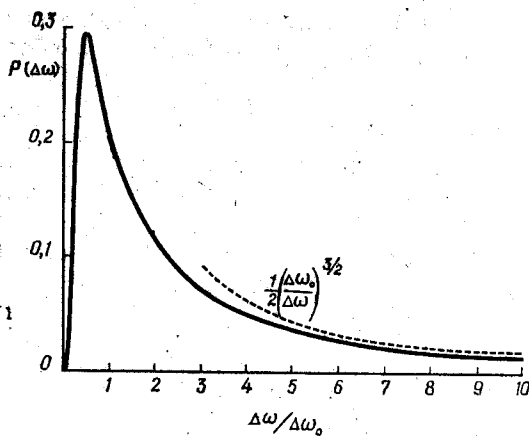
Этот интеграл для  $p = 6$  можно вычислить; в результате имеем

$$V_p(s) = \frac{1}{3} (2\pi)^{3/2} (C_6 s)^{1/2} (1 - i). \quad (78)$$

Таким образом, приходим к формуле для профиля линии (фиг. 2.2):

$$P(\Delta\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\pi}{4} \frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right) \frac{1}{\Delta\omega_0}. \quad (79)$$

Этот результат следует сравнить с результатом, полученным в приближении ближайшего соседа. Асимптотическое поведение обоих результатов для  $\Delta\omega \gg \Delta\omega_0$  оказывается одинаковым; это указывает на то, что сильные



Ф и г. 2.2. Профиль линии, уширенной из-за взаимодействия Ван-дер-Ваальса, согласно статической теории [формула (79)].

Пунктир — приближение ближайшего соседа [формула (76)].

возмущения всегда обусловлены одной возмущающей частицей, которая находится очень близко к излучающему атому. Согласно Маргенау, отношение полной полуширины

$$\Delta\omega_{1/2} = 0,822\pi^2 C_6 n^2 \quad (80)$$

к сдвигу (смещение максимума)

$$\omega_{\text{макс}} - \omega_0 = \frac{8}{27} \pi^2 C_6 n^2 \quad (81)$$

равно 2,78, что находится в хорошем согласии с величиной 2,75, следующей из ударной теории.

### 9. СТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ; $p=2$ , РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХОЛЬЦМАРКА

Случай  $p=2$ , когда фазовый сдвиг есть результат векторного сложения электрических полей отдельных возмущающих частиц (ионов или электронов), несколько более сложен. Если для удобства принять, что  $C_2$  равно единице, то

$$\eta(t+s, t) = \int_t^{t+s} \sqrt{\left(\sum_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}\right)^2} dt. \quad (82)$$

Это выражение крайне трудно вычислить в явном виде для случая движущихся зарядов. Если же заряды покоятся, то напряженность результирующего поля является постоянным вектором, направление которого может быть задано единичным вектором  $\mathbf{s}_0$ .

Вводя вектор  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 \cdot t$ , получаем гораздо более простое выражение:

$$\eta(t+s, t) = \sum_j \left(\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \cdot \mathbf{s}\right), \quad (83)$$

и можно будет продолжать рассуждение в том же духе, что и в случае скалярного сложения полей покоящихся возмущающих частиц, следует только формулу (77) для объема  $V_p(\mathbf{s})$  заменить на

$$V_p(\mathbf{s}) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi [1 - \exp(ir^{-p}\mathbf{s} \cos \vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta r^2 dr. \quad (84)$$

Это необходимо сделать, чтобы учесть отсутствие сферической симметрии, а также существенную зависимость от угла  $\vartheta$  между направлением результирующего поля  $\mathbf{s}_2$  и поля, обусловленного частицей  $j$ . Тогда можно выпол-

нить двукратное интегрирование в (84):

$$V_p(s) = (\gamma s)^{3/p}, \quad (85)$$

где

$$\gamma = \left( \frac{2\pi^2 p}{3(p+3)\Gamma(3/p)\sin(3/2\pi/p)} \right)^{p/3}. \quad (86)$$

Для  $p=2$  получаем  $\gamma=2,6031$ , так что автокорреляционная функция для уширения, обусловленного полями в направлении  $s_0$ , имеет вид

$$\phi(s) = \exp[-n(\gamma s)^{3/2}]. \quad (87)$$

Если учесть, что микрополя изотропны, то вероятность данного смещения  $\Delta\omega$  равна (в силу  $C_2=1$ ) вероятности напряженности поля  $W(F)$ , которая связана с вероятностью для вектора поля  $F$  следующим образом:

$$W(F) = 4\pi F^2 W(F). \quad (88)$$

Тогда

$$\begin{aligned} W(F) &= 4\pi F^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_s \int_{\Omega} \phi(s) \exp(isF \cos \vartheta) ds d\Omega = \\ &= \frac{F^2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \exp[-n(\gamma s)^{3/2} + isF \cos \vartheta] \sin \vartheta d\vartheta s^2 ds. \end{aligned} \quad (89)$$

Интегрируя по  $\vartheta$  и вводя нормальную напряженность поля  $F_0$ :

$$F = \beta F_0 = \beta \gamma n^{2/3}, \quad (90)$$

получаем известное распределение Хольцмарка

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^{\infty} v \sin v \exp\left[-\left(\frac{v}{\beta}\right)^{3/2}\right] dv. \quad (91)$$

Принято выражать  $F$  и  $F_0$  в электростатических единицах. Заменяя единичный заряд на заряд  $e$ , получаем

$$F_0 = e\gamma n^{2/3}. \quad (92)$$

Полезны следующие разложения  $W(\beta)$  в ряды:

$$W(\beta) = \frac{4}{3\pi} \beta^2 (1 - 0,4628\beta^2 + 0,1227\beta^4 \dots) \quad \text{для } \beta \ll 1 \quad (93)$$

и

$$W(\beta) = \frac{1,496}{\beta^{3/2}} \left( 1 + \frac{5,107}{\beta^{3/2}} + \frac{14,43}{\beta^3} \dots \right) \quad \text{для } \beta \gg 1. \quad (94)$$

Для  $1 < \beta < 5$  необходимо прямое численное интегрирование. Таблицы для  $W(\beta)$  приведены в [20—22]; очень подробные таблицы даны в [23, 24].

## 10. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЗАРЯДОВ

В п. 9 мы молчаливо предполагали, что между возмущающими частицами, создающими микрополя, нет взаимодействия. Это эквивалентно допущению, что усредненная потенциальная энергия взаимодействия мала по сравнению с кинетической энергией. Это допущение, несомненно, правильно для случая низких плотностей и высоких температур. В этом пункте мы оценим те видоизменения, которые необходимо сделать в случае более



высоких плотностей, следуя методу группового разложения, описанному Баранже и Мозером [23] и использованному Мозером и Баранже [24]<sup>1)</sup>. Будем исходить из функции

$$\phi(s) = \left\langle \prod_{nV} \exp \left[ -i \left( \frac{r_j}{r_j^3} \cdot s \right) \right] \right\rangle, \quad (95)$$

которую, если ввести вероятность  $P(r_1, \dots, r_{nV})$  данной конфигурации, можно следующим образом записать в явном виде:

$$\phi(s) = \frac{1}{V^{nV}} \int \dots \int \prod_{nV} \exp \left[ -i \left( \frac{r_j}{r_j^3} \cdot s \right) \right] P(r_1, \dots, r_{nV}) dr_1 \dots dr_{nV}. \quad (96)$$

Используем стандартный способ [замены каждой] экспоненты следующим выражением:

$$\exp \left[ -i \left( \frac{r_j}{r_j^3} \cdot s \right) \right] = 1 + \left( \exp \left[ -i \left( \frac{r_j}{r_j^3} \cdot s \right) \right] - 1 \right) = 1 + \varphi_j, \quad (97)$$

так что  $\varphi_j$  есть малое отклонение  $\exp(-i[(r_j/r_j^3) \cdot s])$  от единицы.

Используя разложение

$$\prod \exp \left[ -i \left( \frac{r_j}{r_j^3} \cdot s \right) \right] = 1 + \sum \varphi_j + \sum \sum \varphi_j \varphi_k + \dots \quad (98)$$

и подставляя его в интеграл (96), можно сразу же выполнить интегрирование по координатам всех частиц в первом члене, всех частиц, кроме частицы  $j$ , во втором члене, всех частиц, кроме пары  $jk$ , в третьем члене и т. д. В результате этого получаем  $V^{nV}$ ,  $V^{nV-1}$ ,  $V^{nV-2}$  и т. д.

Таким образом,

$$\phi(s) = 1 + \sum_j \frac{1}{V} \int \varphi_j g_1(r_j) dr_j + \sum_j \sum_k \frac{1}{V^2} \int \int \varphi_j \varphi_k g_2(r_j, r_k) dr_j dr_k + \dots \quad (99)$$

В этом разложении с нормированными вероятностными коэффициентами  $g$  второй член описывает отклонение  $\phi(s)$  от единицы из-за одной возмущающей частицы, тогда как третий член учитывает поправку, обусловленную взаимодействием пары  $jk$ . Поскольку мы не интересуемся тем, чтобы проследить это групповое разложение дальше, то нет необходимости углубляться в сложный формализм в общем случае.

Этот метод является подходящим не только для учета взаимодействия между возмущающими частицами, но также и для учета взаимодействия между возмущающей частицей и излучающим атомом или ионом; иными словами, метод позволяет рассчитать распределение полей в точке, где находится ион.

Для величины  $g$  нужно использовать следующие выражения:

	Нейтральный атом	Ион	
$g_1(r_j)$	1	$\exp \left( -\frac{e^2}{r_{jk} k T} e^{-r_j/D} \right)$	(100)
$g_2(r_j, r_k)$	$\exp \left( -\frac{e^2}{r_{jk} k T} e^{-r_{jk}/D} \right) - 1$		

Для нейтрального атома величина  $g_1(r_j)$  равна 1 и не зависит от положения частицы. Это приводит к распределению Хольцмарка. Если возмущающие частицы взаимодействуют с ионом, находящимся в точке, где должно быть рассчитано распределение полей, то допущение о равной априорной вероят-

<sup>1)</sup> Полученные ими результаты весьма сходны с результатами Эккера [25] и Эккера и Мюллера [26]; см. также [27].

ности распределения частиц больше несправедливо. В этом случае в выражение для вероятности входит величина  $\exp(-U/kT)$ , где  $U$  — потенциал экранированного кулоновского поля. Радиус экранирования  $D$  Дебая — Хюккеля (1923) равен <sup>1)</sup>

$$D = \left[ \frac{kT}{4\pi e^2 (n_e + \sum n_i Z_i^2)} \right]^{1/2}. \quad (101)$$

Взаимодействие возмущающих частиц (однократно заряженных) также описывается теорией Дебая, отклонение  $\exp(-U_{jk}/kT)$  от единицы дает поправочный член, обусловленный взаимодействием пар. Связь с более старым подходом к расчету распределения экранированных полей, развитым Эккером и Мюллером [26], обсуждалась в статье Мозера и Баранже [24], из которой заимствована табл. 2.2.

Таблица 2.2

Распределение полей в точке, где находится нейтральный атом ( $z=0$ ),  
и в точке, где находится ион ( $z=1$ )

$\beta$	$\frac{r_0}{D} = 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r_0}{D} = 0,0898n^{1/2}\epsilon T^{-1/2} = 0,2$		$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r_0}{D} = 0,0898n^{1/2}\epsilon T^{-1/2} = 0,4$	
	$z=0$	$z=0$	$z=1$	$z=0$	$z=1$
0,2	0,01667	0,02848	0,02948	0,05102	0,05538
0,4	0,06308	0,10401	0,10754	0,17482	0,18885
0,6	0,12959	0,20201	0,20838	0,30911	0,33126
0,8	0,20323	0,29472	0,30313	0,40392	0,42862
1,0	0,27122	0,36203	0,37105	0,44324	0,46517
1,2	0,32378	0,39591	0,40417	0,43645	0,45286
1,4	0,35570	0,39873	0,40533	0,40159	0,41206
1,6	0,36633	0,37852	0,38312	0,35444	0,35985
1,8	0,35850	0,34459	0,34726	0,30527	0,30690
2,0	0,33694	0,30475	0,30581	0,25951	0,25853
2,2	0,30684	0,26444	0,26428	0,21935	0,21672
2,4	0,27275	0,22682	0,22580	0,18523	0,18162
2,6	0,23822	0,19338	0,19181	0,15673	0,15261
2,8	0,20557	0,16454	0,16265	0,13314	0,12880
3,0	0,17606	0,14012	0,13807	0,11367	0,10929
3,5	0,11837	0,09514	0,09310	0,07845	0,07442
4,0	0,08067	0,06660	0,06481	0,05611	0,05261
5,0	0,04118	0,03596	0,03470	0,03152	0,02897
7,0	0,01514	0,01414	0,01350	0,01303	0,01161
10,0	0,00554	0,00537	0,00508	0,00512	0,00441

#### 11. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ

Если число частиц в дебаевской сфере мало, т. е. если

$$\frac{r_0}{D} = 0,127n^{1/2}\epsilon T^{-1/2} \gg 1, \quad (102)$$

то расчеты предыдущего пункта несправедливы. В этом случае средняя энергия взаимодействия  $e^2/r_0$  сравнима со средней кинетической энергией  $kT$ , и теория Дебая оказывается непригодной.

В 1947 г. Майер [28] сделал попытку описать такую сверхплотную плазму с помощью очень простой модели. Ионы с зарядом  $+Ze$  находятся близко к центру сферы (с радиусом  $r_0$ ), в которой однородно распределен электронный заряд  $-Ze$ . Эти ионы упруго связаны с центром сферы, так как

<sup>1)</sup> Поскольку мы рассматриваем низкочастотную компоненту (см. [24]), то нет необходимости принимать во внимание специальный случай экранирования только электронами.

потенциал пропорционален квадрату смещения  $\rho = r/r_0$ :

$$U = \frac{Z^2 e^2}{2r_0} (\rho^2 - 3). \quad (103)$$

Бройль [29] изучал вопрос о функции распределения полей в такой модели и нашел, что если ввести

$$F_0 = \frac{Ze}{r_0}, \quad (104)$$

то

$$\beta = \frac{F}{F_0} = \rho^{-2} - \rho \quad (105)$$

и

$$W(\beta) = 3(2\rho^{-5} + \rho^{-2})^{-1}. \quad (106)$$

Для больших значений напряженности поля это распределение, которое является неявной функцией  $\beta$ , очень похоже на распределение Хольцмарка; оба имеют одинаковое асимптотическое поведение:

$$W(\beta) = \frac{3}{2} \beta^{-5/2} \quad \text{для } \beta \rightarrow \infty. \quad (107)$$

Однако здесь в отличие от распределения Хольцмарка наиболее вероятным является поле с нулевой напряженностью.

Чтобы рассчитать распределение напряженности полей в точке с зарядом  $Z_2 e$ , Бройль принял, что этот заряд размещается внутри сферы вокруг заряда  $Z_1 e$ . Тогда потенциал взаимодействия имеет вид

$$U_{12} = Z_1 Z_2 e^2 \left( \frac{2}{\rho} + \rho^3 - 3 \right) \quad (108)$$

и вследствие изменения вероятности найти заряженную точку в указанном месте мы получаем функцию распределения в виде

$$W(\beta) = 3(2\rho^{-5} + \rho^{-2})^{-1} \exp\left(-\frac{U_{12}}{kT}\right). \quad (109)$$

### § 3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ УШИРЕНИЯ ЛИНИЙ

Детальное рассмотрение квантовых теорий уширения линий выходит за рамки данной статьи. Поэтому здесь можно только вкратце обрисовать основные принципы (следуя, частично, обзорной статье Баранже [30]). Более детальное рассмотрение читатель может найти в этой статье и в других обзорных статьях по этому вопросу, которые появились в последнее время. Они приведены в списке литературы к этой главе.

#### 1. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ $\Phi(s)$

Исходной точкой всех квантовомеханических расчетов профилей линий является хорошо известное выражение для мощности, излучаемой системой при переходе из начального состояния  $i$  в конечное состояние  $f$ :

$$\frac{4\omega_{if}^4}{3c^2} |\langle f | \mathbf{d} | i \rangle|^2; \quad (110)$$

угловая частота излучаемых волн равна

$$\omega_{if} = \frac{1}{\hbar} (E_i - E_f). \quad (111)$$

Излученная линия была бы резкой, если бы можно было пренебречь взаимодействием между атомом и полем излучения и, кроме того, если бы атом не взаимодействовал с окружающими частицами. В последующих пунктах мы будем пренебрегать первым типом взаимодействия, которое обуслови-

вает радиационное уширение (уже рассмотренное в § 2, п. 2), но будем учитывать взаимодействие с возмущающими частицами, например с другими атомами, ионами и электронами.

С квантовомеханической точки зрения вполне естественно рассматривать излучающий атом и все возмущающие частицы как одну, но очень сложную систему. Тогда формула (110) годится для описания уширенного профиля, если суммирование ведется по всем начальным и конечным под-состояниям такой сложной системы:

$$P(\omega) \approx \sum_{if} \delta(\omega - \omega_{if}) |\langle f | d | i \rangle|^2 \rho_i. \quad (112)$$

Здесь с помощью  $\delta$ -функции Дирака мы учитываем тот факт, что в  $P(\omega)$  вносят вклад только те переходы, для которых  $\omega = \omega_{if}$ . Элементы матрицы плотности  $\rho_i$  пропорциональны числам заполнения начальных подсостояний  $i$ .

Из обсуждения проблемы уширения линии в рамках классической теории мы знаем, что усредненное изменение поля излучения в интервале времени  $s$ , описываемое автокорреляционной функцией  $\phi(s)$ , определяет профиль  $P(\omega)$ . Функции  $\phi(s)$  и  $P(\omega)$  являются функциями, взаимно преобразованными по Фурье, так что форма линии в точке  $\Delta\omega$  определяется в основном значением  $\phi(s)$  в точке  $s = 1/\Delta\omega$ . В квантовой механике имеется очень похожий принцип расчета. Для того чтобы использовать его, введем функцию  $\phi(s)$  следующим образом:

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} P(\omega) d\omega = \sum_{if} e^{-i\omega_{if}s} |\langle f | d | i \rangle|^2 \rho_i. \quad (113)$$

Все соотношения, относящиеся к  $\phi(s)$ , которые были рассмотрены в предыдущих параграфах, применимы также и к этой функции<sup>1)</sup>.

Связь функции  $\phi(s)$  с усредненной временной эволюцией квантовомеханической системы становится более очевидной, если использовать хорошо известный оператор временной эволюции:

$$T(s) = T(s, 0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Hs\right), \quad (114)$$

который обладает тем свойством, что он переводит функцию  $|\psi(t_0)\rangle$  в ту же функцию в момент времени  $t_0 + s$ :

$$|\psi(t_0 + s)\rangle = T(t_0 + s, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (115)$$

Если  $\psi$  есть собственная функция гамильтониана  $H$ , то это преобразование эквивалентно умножению на  $\exp(-iEs/\hbar)$ . Учитывая это, получаем из (111) и (113) выражение, в котором  $\phi(s)$  может быть представлено в виде следа матрицы, без явного использования начальных и конечных состояний:

$$\phi(s) = \text{Sp} [dT^*(s) dT(s) \rho]. \quad (116)$$

Эта формула очень похожа на соответствующее классическое выражение. В обоих случаях связаны амплитуда электромагнитной волны или амплитуда колебаний эквивалентного атомного диполя в момент времени  $t$  и комплексно сопряженная величина в момент времени  $t + s$ .

## 2. ПОЛУКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД

При определенных условиях, которые будут выведены в этом пункте, возможен полуклассический подход, т. е. рассмотрение проблемы уширения в предположении, что возмущающие частицы описываются классическим образом.

<sup>1)</sup> Единственное отличие состоит в том, что здесь начало отсчета в шкале частот не сдвинуто в точку, соответствующую положению невозмущенной линии.

Запишем гамильтониан в виде суммы гамильтониана атома  $H_a$ , гамильтониана частиц  $K$  и взаимодействия  $V$ :

$$H = H_a + K + V. \quad (117)$$

Пусть, кроме того, волновая функция полной системы имеет вид

$$\psi(t) = \chi(t) \varphi(t), \quad (118)$$

где  $\varphi(t)$  зависит только от координат возмущающих частиц и описывает их движение. Волновая функция атома  $\chi(t)$  зависит только от координат атомных электронов, она определяется атомным полем и возмущением. Если, наконец, можно пренебречь влиянием атома на движение возмущающих частиц, то  $\varphi(t)$  является решением уравнения

$$i\hbar \frac{d\varphi}{dt} = K\varphi. \quad (119)$$

Используя соотношение

$$\chi(t) = \int \varphi^*(t) \psi(t) dx_p \quad (120)$$

и приближения, упомянутые выше, из уравнения Шредингера для полной системы

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi \quad (121)$$

можно получить следующее уравнение для  $\chi(t)$ :

$$i\hbar \frac{d\chi}{dt} = \left( H_a + \int \varphi^* V \varphi dx_p \right) \chi = (H_a + V_{\text{кл}}) \chi. \quad (122)$$

Здесь  $V_{\text{кл}}$  — потенциал взаимодействия излучающего атома с волновыми пакетами возмущающих частиц.

При таком подходе изменяется не только формулировка проблемы, но также и основные физические допущения. При анализе уравнения (122) мы больше не рассматриваем стационарные состояния сложной системы, включающей возмущающие частицы; мы должны решить уравнение Шредингера для одного атома, на который действует зависящее от времени возмущение  $V_{\text{кл}}$ , обусловленное взаимодействием с движущимися частицами. Это можно сделать стандартными методами теории возмущений, зависящих от времени.

Наша модель не является внутренне согласованной, так как в ней будет иметь место некоторая передача энергии атому, которая учитывается, тогда как обратной реакцией мы пренебрегаем [см. (119)]. Это, однако, не вызовет трудностей, пока временный интервал  $s$ , в течение которого мы наблюдаем за системой, настолько мал, что передача энергии в течение времени  $s$  мала по сравнению с  $kT$ .

Теперь выражение для автокорреляционной функции можно записать в следующем виде:

$$\phi(s) = \text{Sp} [dt^*(s) dt(s) \rho]_{\text{ср}}, \quad (123)$$

где

$$t(s) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (H_a + V_{\text{кл}}) s \right]. \quad (124)$$

В этом выражении суммирование в следе матрицы ведется только по состояниям атома. Усреднение проводится по всем возможным конфигурациям и движениям возмущающих частиц.

Эта формулировка имеет преимущество только в том случае, если ширины  $\Delta q$  волновых пакетов малы по сравнению с характерной длиной задачи  $d$  и если, кроме того,  $\Delta q$  остается малым в течение интервала времени  $s$ .

Эти два условия

$$\frac{\Delta q}{d} \ll 1 \text{ и } \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta p}{p} \ll 1$$

можно объединить в одно:

$$\Delta p \Delta q \approx h \ll pd \approx l\hbar. \quad (125)$$

Здесь  $l$  — квантовое число для углового момента при теловом движении частицы.

Если в качестве характерной длины  $d$  взять среднее расстояние между частицами, что разумно для статической теории, то соотношение (125) означает просто, что газ возмущающих частиц невырожден, т. е. квантовомеханические состояния, возможные для возмущающих частиц, почти все свободны. Условие (125) является более жестким, если следует применять ударную теорию, и в качестве характерного расстояния выбирается радиус Вайскопфа  $\rho_W$  [см. (67)], для которого, согласно классической теории, фазовый сдвиг равен единице:  $\eta(\rho_W) = 1$ .

Для линейного штарк-эффекта ( $p = 2$ ) условие (125) примет вид

$$\frac{3}{4} \pi n(n-1) \gg 1, \quad (126)$$

если  $C_2 = \Delta \omega r^{-2}$  аппроксимировать выражением  $\frac{3}{4} \hbar n(n-1)$ . Согласно (126) главное квантовое число  $n$  верхнего уровня должно быть не слишком малым; это условие всегда выполняется. Положение более критично в случае квадратичного штарк-эффекта. Из (125) и (67) получаем

$$1 \ll m^{2/3} (kT)^{1/3} \left(\frac{1}{2} \pi\right)^{1/3} C_4^{1/3} \hbar^{-1}. \quad (127)$$

Видно, что полуклассический подход корректен, если только постоянная  $C_4$  не слишком мала, она должна быть порядка  $10^{-14} \text{ сек}^{-1} \cdot \text{см}^{-4}$ . Атомы или ионы при столкновении всегда можно рассматривать как классические частицы.

### 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И АТОМ С ОДНИМ УРОВНЕМ

Помимо оператора  $t(s)$ , полезно ввести другой унитарный оператор:

$$u(s) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_a s\right) t(s). \quad (128)$$

Оператор  $u(s)$ , так же как и  $t(s)$ , конечно, совпадает с единичным оператором при  $s = 0$ , но в отличие от  $t(s)$  изменение  $u(s)$  зависит только от взаимодействия с возмущающими частицами, так что оператор  $u(s)$  не меняется, если можно пренебречь этим взаимодействием. Определение  $u(s)$  с помощью интегрального уравнения

$$u(s) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^s V'(s) u(s) ds \quad (129)$$

с потенциалом взаимодействия

$$V'(s) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_a s\right) V_{\text{кл}}(s) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_a s\right) \quad (130)$$

эквивалентно уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{du(s)}{ds} = V'(s) u(s) \quad (131)$$

с начальным условием

$$u(0) = 1.$$

Этот оператор можно представить в виде хорошо известного ряда теорией возмущений,

$$u(s) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^s ds_1 V'(s_1) + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^s ds_1 V'(s_1) \int_0^{s_1} ds_2 V'(s_2) + \dots, \quad (132)$$

которое представляет собой решение интегрального уравнения в виде ряда Неймана.

Решение можно записать и в другом виде:

$$u(s) = \mathcal{T} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^s V'(s_1) ds_1 \right], \quad (133)$$

где  $\mathcal{T}$  — хронологический оператор, с помощью которого операторы, соответствующие  $\exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^s V'(s_1) ds_1 \right]$ , действуют в нужной временной последовательности.

Сейчас исключительно из соображения удобства мы упростим задачу, приняв, что с возмущающими частицами взаимодействует только атом, находящийся в подсостояниях  $\alpha$  верхнего уровня  $a$ , взаимодействием же с ними атома на нижнем уровне  $b$  (подсостояния  $\beta$ ) пренебрежем. Это допущение оказывается хорошим приближением во всех тех случаях, когда в нижнем состоянии имеется сильная связь. При этом допущении  $t^*(s) = \exp(i\omega_f s)$  можно заменить на единицу, если в качестве начала координат в шкале частот взять  $\omega_f$ . Наконец, вводя оператор  $D$  с помощью соотношения

$$\langle \alpha | D | \alpha' \rangle = \sum_{\beta} \langle \alpha | d | \beta \rangle \langle \beta | d | \alpha' \rangle \quad (134)$$

и принимая  $\rho = 1$  (расстояние между состояниями мало по сравнению с тепловой энергией), приходим к окончательному выражению:

$$\phi(s) = \text{Sp} [Dt_{\text{cp}}(s)]. \quad (135)$$

#### 4. КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Некоторые замечания, касающиеся обобщенных квантовомеханических ударных теорий, в которых в квантовомеханическую систему включается возмущающая частица, могут помочь высветить роль адиабатических и неадиабатических столкновений в уширении и сдвиге линии, а также их связь с упругим и неупругим рассеянием возмущающих частиц.

Для упрощения формул мы ограничимся случаем, когда с возмущающими частицами взаимодействует только атом, находящийся в верхнем состоянии  $i$ , а в качестве начала координат на энергетической оси возьмем величину  $\hbar\omega_f$ , соответствующую энергии нижнего уровня. Тогда оператор эволюции в представлении взаимодействия запишется следующим образом:

$$U(t) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (H_a + K) t \right] \exp \left( -\frac{i}{\hbar} H t \right); \quad (136)$$

изменение же  $U(t)$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} U(t+s, t) &= U(t+s) U^{-1}(t) = \\ &= \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (H_a + K) (t+s) \right] \exp \left( -\frac{i}{\hbar} H s \right) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (H_a + K) t \right]. \end{aligned} \quad (137)$$

Если принять, что атом взаимодействует в момент  $s$  независимо с взаимно независимыми волновыми пакетами, то  $U(t+s, t)$  будет суммой вкладов

всех волновых пакетов. Вклад одного пакета имеет вид

$$\langle \alpha \varphi(0) | U(t+s, t) | \alpha' \varphi(0) \rangle. \quad (138)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\alpha'$  — два атомных состояния,  $\varphi$  — волновая функция возмущающей частицы. Используя (137), получаем для матричного элемента выражение

$$\begin{aligned} & \exp(i\omega_{\alpha}t) \langle \alpha' \varphi(t) | \exp\left[\frac{i}{\hbar}(H_{\alpha} + K)s\right] \times \\ & \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Hs\right) | \alpha \varphi(t) \rangle \exp(-i\omega_{\alpha}t). \end{aligned} \quad (139)$$

Рассматривая волновые функции возмущающей частицы, мы видим, что  $\langle \alpha' \varphi(t) | \exp[i(H_{\alpha} + K)s/\hbar]$  является волновой функцией (в момент времени  $t+s$ ) свободной возмущающей частицы, поскольку взаимодействие с атомом не включено в гамильтониан  $H_{\alpha} + K$ . С другой стороны,  $\exp(-iHs/\hbar) | \alpha \varphi(t) \rangle$  представляет собой волновую функцию возмущающей частицы, рассеявшейся на атомном потенциале, который включает в полный гамильтониан  $H$ . Если пренебречь изменением энергии возмущающей частицы во время неупругого столкновения ( $\alpha' \neq \alpha$ ), то, используя амплитуду рассеяния на угол  $0^{\circ}$ , т. е. величину  $f(0)$ , и учитывая все возмущающие частицы, можно привести выражение (139) к следующему виду:

$$\delta_{\alpha\alpha'} + i \frac{\hbar n}{m} s e^{i\omega_{\alpha}t} \langle \alpha' | f(0) | \alpha \rangle e^{-i\omega_{\alpha}t}. \quad (140)$$

Таким образом, найдена связь между средним от оператора эволюции и амплитудами рассеяния возмущающих частиц на угол  $0^{\circ}$ . На существование этого соотношения обратил внимание Баранже [31].

Если атомный потенциал сферически симметричен, то амплитуду рассеяния на угол  $0^{\circ}$  можно представить в виде ряда по сдвигам фазы при рассеянии  $\delta_l$  для отдельного углового момента  $\hbar l$  возмущающих частиц с волновым числом  $k = mv/\hbar$ :

$$f(0) = (2ik)^{-1} \sum_l (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1). \quad (141)$$

Фазовые сдвиги действительны, если столкновения упругие (адиабатические); они комплексны, если имеется вклад неупругих (неадиабатических) столкновений.

Теперь необходимо более внимательно рассмотреть различие между изолированной линией и перекрывающимися линиями и установить их связь с понятием столкновения. Следуя Баранже [31], мы рассмотрим два последовательных неадиабатических столкновения, приводящих к переходу из состояния  $\alpha$  в состояние  $\alpha'$  и затем из  $\alpha'$  обратно в  $\alpha$ . Если разность энергий состояний  $\alpha$  и  $\alpha'$  в (шкале частот), умноженная на среднее время пребывания атома в состоянии  $\alpha'$ , достаточно велика ( $> 1$ ), так что любое фазовое соотношение для оптической волны, излучаемой атомом, за это время «забывается», то первое неупругое столкновение полностью прерывает процесс излучения. В результате неупругие столкновения дают вклад в ширину линии, но не дают вклада в сдвиг. Условие

$$\omega_{\alpha\alpha'} \tau_{\alpha'\alpha} = \omega_{\alpha\alpha'} (n\nu\sigma_{\alpha'\alpha})^{-1} \approx \frac{\omega_{\alpha\alpha'}}{\gamma} \gg 1 \quad (142)$$

указывает на то, что компоненты изолированной линии, соответствующие переходам из состояний  $\alpha$  и  $\alpha'$ , могут быть хорошо разрешены, тогда как для перекрывающихся линий они сливаются. В этом последнем случае неадиабатические столкновения не нарушают когерентности волны и, следовательно, дают вклад как в уширение, так и в сдвиг. По этой причине теория для перекрывающихся линий является более сложной, чем для изолированной линии.



Если сделать допущение об изолированности линий, то ударная теория приводит к простому дисперсионному профилю со следующими параметрами:

$$\text{сдвиг } \Delta\omega_s = -\frac{\hbar n}{m} \operatorname{Re} [f(0)]_{\text{ср}} \quad (143)$$

и

$$\text{ширина } \gamma = \frac{\hbar n}{m} \operatorname{Im} [f(0)]_{\text{ср}}.$$

Используя оптическую теорему, которая связывает мнимую часть амплитуды рассеяния на угол  $0^\circ$  с полным сечением

$$\operatorname{Im} f(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma, \quad (144)$$

мы можем выразить  $\gamma$  через полное сечение:

$$\gamma = \left[ \frac{1}{2} n v \sigma \right]_{\text{ср}}. \quad (145)$$

Связь с классическими ударными теориями (Линдхольм, Фоли) можно установить, если ограничиться случаем сферической симметрии и использовать вытекающие из (141) соотношения

$$\Delta\omega_s = - \left[ \frac{\pi n}{mk} \sum_l (2l+1) \Gamma_l \sin 2\delta'_l \right]_{\text{ср}} \quad (146)$$

и

$$\gamma = \left[ \frac{\pi n}{mk} \sum_l (2l+1) (1 - \Gamma_l \cos 2\delta'_l) \right]_{\text{ср}}. \quad (147)$$

Для удобства мы заменили  $\exp(i\delta_l)$  на  $\Gamma'_l \exp(i\delta'_l)$  с действительным  $\delta'_l$ . Для упругих столкновений, т. е. единственного типа столкновений, учитываемых в теории Линдхольма—Фоли, имеем  $\Gamma_l \equiv 1$ . Эти формулы можно преобразовать в классические следующим образом:

- а) вычислить  $\delta'_l$  с помощью метода ВКБ,
- б) принять, что  $2\delta_l = \eta(\rho)$ ,
- в) заменить  $(\pi/k^2) \sum_l (2l+1)$  на  $\int 2\pi\rho d\rho$ .

Развивая в том же духе теорию для случая, когда атом и в нижнем (конечном) состоянии  $f$  взаимодействует с возмущающими частицами, мы приходим к следующей формуле для ширины изолированной линии:

$$\gamma = \left\{ \frac{1}{2} n v \left[ \sigma_{i, \text{неупр}} + \sigma_{j, \text{неупр}} + \iint \sin \Theta d\Theta d\varphi |f_i(\Theta, \varphi) - f_j(\Theta, \varphi)|^2 \right] \right\}_{\text{ср}}. \quad (148)$$

Этот результат не удивителен. Вклады неупругих столкновений в конечном и начальном состояниях,  $\sigma_{i, \text{неупр}}$  и  $\sigma_{j, \text{неупр}}$ , складываются некогерентно, тогда как вклады упругих (адиабатических) столкновений из начального и конечного состояний вычитаются когерентно. Этот последний результат находится в согласии с принципом Франка — Кондона.

## 5. УДАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Метод расчета  $t_{\text{ср}}(s)$  или  $u_{\text{ср}}(s)$  в ударном приближении очень похож на метод, используемый в классической теории; очень похожи и условия применимости. Требование независимости действия возмущающих частиц на излучающий атом соответствует допущению о скалярной аддитивности фазовых сдвигов. Тогда

$$u_{\text{ср}}(t+s, t) = \left[ \prod_{n\nu} u_j(t+s, t) \right]_{\text{ср}}, \quad (149)$$

и в предположении об отсутствии взаимодействия между возмущающими частицами  $j$  можно записать

$$u_{cp}(t+s, t) = [u_{j, cp}(t+s, t)]^{nV} = e^{-nV_p(s)}. \quad (150)$$

Используя представление о «полноте» столкновения, которое требует, чтобы  $s$  превышало длительность одного слабого столкновения

$$s > \frac{\rho_{слаб}}{v}, \quad (151)$$

получаем следующую формулу для оператора объема возмущения:

$$V_p(s) = s \int_0^\infty W(v) v dv \int_0^\infty \left\{ 1 - \mathcal{T} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty V'(t) dt \right] \right\} 2\pi\rho dp. \quad (152)$$

Эта экспоненциальная форма оператора в представлении взаимодействия использовалась Вайнштейном и Собельманом [32]. Грим и др. [33] предпочли использовать разложение теории возмущений; они получили следующее выражение для  $V_p(s)$ :

$$V_p(s) = s \int_0^\infty W(v) dv \int_0^\infty \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt_1 V'(t_1) - \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^\infty dt_1 V'(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V'(t_2) \dots \right] 2\pi\rho dp. \quad (153)$$

Для выяснения условий применимости ударного приближения требуется некоторый дополнительный анализ. Для «распутывания» возмущений необходимо, чтобы среднее от полного возмущения за время  $\rho_{слаб}/v$  было настолько мало, чтобы  $u_{cp}(t + \rho_{слаб}/v, t)$  было близко к единице. В этом случае каждая сталкивающаяся с атомом возмущающая частица практически взаимодействует с ним в начале указанного столкновения, и возмущения, обусловленные этими слабыми столкновениями, естественно, распутываются. Если за время  $\rho_{слаб}/v$  случайно произойдет сильное столкновение [вероятность которого должна быть мала, для того чтобы  $u_{cp}(t + \rho_{слаб}/v, t)$  не отличалось заметно от единицы], то можно пренебречь всеми другими столкновениями в этом интервале времени, и проблемы распутывания снова не возникает.

Как только найден оператор  $V_p(s)$ , который линеен по  $s$ , можно ввести постоянный во времени эффективный гамильтониан возмущения  $\mathcal{H}$  с помощью соотношения

$$nV_p(s) = \frac{i}{\hbar} \mathcal{H} s, \quad (154)$$

так что

$$t_{cp}(s) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (H_a + \mathcal{H}) s \right]. \quad (155)$$

Выполняя фурье-преобразование, приходим, наконец, к следующему выражению:

$$P(\omega) = -\text{Im Sp} \frac{1}{\pi} \left( \frac{D}{\omega - (H_a + \mathcal{H})/\hbar} \right). \quad (156)$$

Для перекрывающихся линий (водород) оценка этого выражения приводит к сумме произведений в основном двух типов матричных элементов:

$$\frac{1/2\gamma}{(\Delta\omega + \Delta\omega')^2 + (1/2\gamma)^2} \text{ и } \frac{\Delta\omega + \Delta\omega'}{(\Delta\omega + \Delta\omega')^2 + (1/2\gamma)^2}. \quad (157)$$

Следствием этого является тот факт, что окончательное распределение интенсивности не есть просто сумма дисперсионных профилей с разными  $\gamma$ , зависящими от различных времен жизни атомных состояний, но в нем из-за недиагональных элементов оператора  $\hat{\phi}$  имеются также и асимметричные члены. Если недиагональные элементы обращаются в нуль, то в результате получаем лоренцевский профиль линии, как это было уже показано Андерсоном [34].

Конечно, для изолированной линии профиль имеет вид

$$P(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1/2\gamma}{(\Delta\omega - \Delta\omega_s)^2 + (1/2\gamma)^2} \quad (158)$$

со сдвигом

$$\Delta\omega_s = \text{Re} \langle i | \mathcal{H} | i \rangle \quad (159)$$

и полушириной

$$\gamma = -\text{Im} 2 \langle i | \mathcal{H} | i \rangle. \quad (160)$$

## 6. УШИРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНАМИ

Квантовомеханическая теория ударного уширения электронами была разработана в основном Гримом и др. [33]. Если с электронами взаимодействует только атом, находящийся на начальном верхнем уровне, то получается дисперсионный профиль с шириной  $\gamma$  и сдвигом  $\Delta\omega_s$ , которые, согласно Гриму и др., даются следующим выражением:

$$\gamma + i\Delta\omega_s = n \int_0^\infty W(v) v dv \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho \frac{2\hbar^2}{3m^2 v^2 \rho^2} \times \\ \times \sum_{\nu_k, l_k, \sigma, m_k} \frac{|\langle i | r_\sigma | k \rangle|^2}{a_0^2} C(z_{ik}). \quad (161)$$

Здесь  $r_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, 3$ ) — координаты атомного электрона. Суммирование ведется по всем  $\sigma$  и по всем разрешенным переходам в состояния  $k$ , имеющие квантовые числа  $m_k, l_k = l_i \pm 1$  и  $\nu_k$  (главное квантовое число). Это есть результат разложения согласно теории возмущений, в котором члены первого порядка исчезают, а член второго порядка приводит к интегралу

$$C(z_{ik}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \frac{(1+x_1x_2) \exp[iz_{ik}(x_1-x_2)]}{(1+x_1^2)^{3/2} (1+x_2^2)^{3/2}}, \quad (162)$$

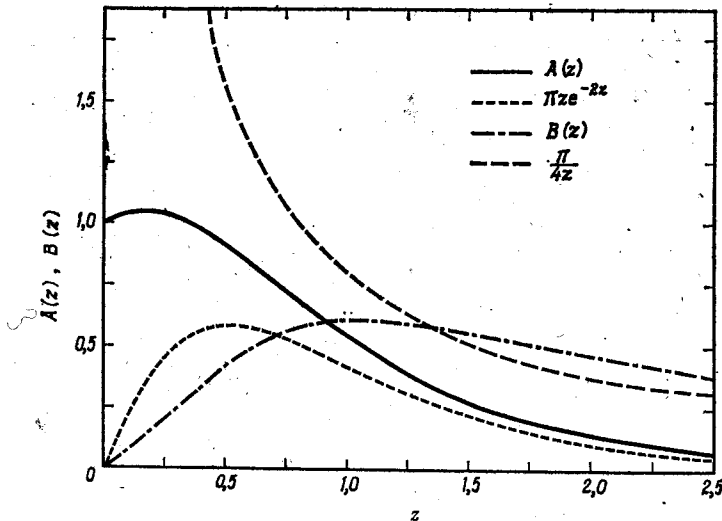
где  $x$  и  $z_{ik}$  — безразмерные переменные:

$$x = \frac{vt}{\rho}, \quad z_{ik} = \omega_{ik} \frac{\rho}{v}. \quad (163)$$

Выделяя в  $C(z_{ik})$  действительную часть  $A$ , которая учитывает переходы из-за столкновений с электронами и которая обращается в нуль, если все столкновения являются упругими, и мнимую часть  $B$ , описывающую эффект упругих столкновений, мы получаем зависимость  $A$  и  $B$  от безразмерного параметра столкновения  $z_{ik}$  (фиг. 2.3). Величина  $A$  уменьшается экспоненциально при больших  $z_{ik}$ , что приводит к уменьшению влияния неупругих столкновений, если  $\omega_{ik} > v\rho^{-1}$ . Величина  $B$  асимптотически аппроксимируется гиперболой  $1/4\pi/z$ . Действительно, можно показать, что  $B(z_{ik})$  точно описывает зависимость классического сдвига фазы от параметра столкновения.

Возвращаясь к выражению (161), заметим, что интеграл по  $\rho$  расходится на нижнем пределе. Таким образом, сильные столкновения необходимо рассматривать отдельно, что было сделано Гримом и др. просто путем обрезания интеграла на некотором  $\rho_{\text{мин}}$  и использования теории сильных столк-

новений Лоренца для  $\rho < \rho_{\text{мин}}$ . Следует заметить, что, согласно (161), сдвиг линии целиком обусловлен  $B(z_{ik})$ , т. е. упругими столкновениями, тогда как уширение определяется исключительно неупругими столкновениями. Здесь уже не видно тесной связи с классической теорией Линдхольма — Фоли, согласно которой сдвиг и уширение появляются в результате упругих



Ф и г. 2.3. Действительная  $A$  и мнимая  $B$  части функции  $C(z) = C(\omega_{ik}\rho/v)$  согласно [33]. Величины  $A/\rho$  и  $B/\rho$  пропорциональны вкладам столкновений с прицельным параметром  $\rho$  в уширение и сдвиг линии соответственно. Выражения  $\pi z e^{-2z}$  и  $\pi/4z$  асимптотически аппроксимируют  $A$  и  $B$ .

столкновений со сдвигом фазы; эту связь можно, однако, все еще обнаружить, если в разложении (153) учесть члены высших порядков по возмущению.

Используя формализм Вайнштейна и Собельмана [32], приходим к формуле (см. [30] и критические замечания в [33])

$$\gamma + i\Delta\omega_s = n \int_0^\infty W(v) v dv \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho (1 - e^{-\eta - i\varphi}). \tag{164}$$

Здесь выражение для комплексного сдвига фазы имеет вид

$$\eta + i\varphi = \frac{2}{3} \left(\frac{\hbar}{m\nu\rho}\right)^2 \sum_{\nu_k, l_k, \sigma, m_k} \frac{|(l| r_\sigma | k)|^2}{a_0^3} C(z_{ik}). \tag{165}$$

Оно эквивалентно выражению (161) для вклада слабых столкновений. Следует отметить следующие преимущества формулы (164):

- а) интегралы не расходятся, так что не нужно вводить произвольного обрезания;
- б) ширина и сдвиг линии удовлетворяют требуемым дисперсионным соотношениям.

## § 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. ВОДОРОДНЫЕ ЛИНИИ

Уровни энергии нейтрального водорода (так же, как и уровни  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$  и т. д.) вследствие их особого  $2n^2$ -кратного вырождения взаимодействуют с постоянными электрическими полями согласно схеме линейного штарк-эффекта. Поле  $F$  (в электростатических единицах) вызывает симметричное расщепление термов и соответствующее расщепление линий, которое в ну-

левом порядке дается формулой

$$\Delta\omega_k = \frac{3\hbar}{2m_e} kF. \quad (166)$$

Здесь  $k$  — целые числа. Интенсивности  $I_k$  этих компонент <sup>1)</sup>, нормированные условием  $\sum I_k = 1$ , можно рассчитать аналитически, если использовать волновые функции для невозмущенного атома [35, 36]. Поправки высших порядков для смещения и интенсивностей, которые важны в случае сильных микрополей в плазме с большой плотностью ( $n_e > 10^{18}$ ), получены в [37]. В качестве иллюстрации на фиг. 2.4 представлены компоненты для нескольких первых линий бальмеровской серии.

Сравнивая (166) с формулой  $\Delta\omega = C_2 r^{-2}$ , получаем выражение для постоянной взаимодействия  $C_2$ :

$$C_{2,k} = \frac{3\hbar}{2m} k. \quad (167)$$

Для оценок и приближенных расчетов полезно использовать взвешенное среднее значение этих постоянных, которое включает только компоненты с положительными  $k$ :

$$C_2 = \frac{3\hbar}{2m} \frac{\sum kI_k}{\sum I_k} \text{ для } k > 0. \quad (168)$$

Для бальмеровских линий получаем следующие величины:

	$H_\alpha$	$H_\beta$	$H_\gamma$	$H_\delta$	$H_n^*$
$\sum_{k>0} kI_k / \sum I_k$	2,24	5,96	11,8	15,9	$\sim \frac{1}{2} n(n-1)$
$C_2$	3,89	10,4	20,5	27,6	$\sim 0,869n(n-1)$
$\sum k^{3/2} I_k$	1,14	7,74	18,3	35,4	$\sim \frac{1}{5} [n(n-1)]^{3/2}$

\* Значения для  $H_n$  вычислены согласно приближению, использованному в [38] для расчета штарковского расщепления.

Величины в последней строке этой таблицы необходимы для расчета далеких крыльев линии [см. (174)].

Используя эти данные, можно с помощью (69) найти области, в которых применимы ударения и статическая теория уширения. Травинг [39], применяя при расчете  $\Delta\omega_H$  несколько иной множитель (0,2 вместо  $\pi^{-1}$ ), нашел следующие границы (в Å), которые разделяют ударную теорию (внутренняя часть линии) и статическую теорию (внешняя часть линии):

		$T$ в °К	25 000	10 000	5000	3000
$H_\alpha$	{ электроны		1160	460	220	140
	{ протоны		1,26	0,50	0,24	0,16
$H_\beta$	{ электроны		240	96	48	28
	{ протоны		0,26	0,10	0,06	0,04
$H_\gamma$	{ электроны		96	38	18	12
	{ протоны		0,10	0,04	0,02	0,012
$H_\delta$	{ электроны		64	26	12	8
	{ протоны		0,06	0,02	0,014	0,008

<sup>1)</sup> Эти компоненты поляризованы частично линейно, частично по кругу, и следует быть осторожным при выборе правильных величин интенсивностей, используя значения для полного излучения, а не те, которые рассчитываются для излучения, перпендикулярного внешнему электрическому полю.

Эти числа являются оценочными, однако они достаточно точны, чтобы показать, что при не слишком больших плотностях электронов и ионов электронное уширение описывается в основном ударной теорией, тогда как ионы приводят к уширению, описываемому статической теорией. Но здесь необходимо обратиться к более точным квантовомеханическим теориям.

Вначале, следуя истории вопроса, рассмотрим статическую теорию. Если существует распределение  $W(\beta)$  соответствующим образом нормированных статических полей  $\beta = F/F_0$ , скажем распределение Хольцмарка, то все компоненты  $k$  из-за линейной связи  $F$  и  $\Delta\lambda$  будут иметь форму, сходную с  $W(\beta)$ , однако с различными масштабами в шкале длин волн. Тогда профиль линии получается просто как результат наложения этих компонент. Для удобства и в соответствии с общепринятыми обозначениями мы определим  $c_k$  соотношением

$$c_k = \frac{\Delta\lambda}{F} = \lambda^2 \frac{3h}{4\pi c m e} k \quad (169)$$

и получим нормированный профиль одной компоненты

$$W(\beta) d\beta = W\left(\frac{\alpha}{c_k}\right) \frac{d\alpha}{c_k}, \quad (170)$$

где использован приведенный масштаб длин волн:

$$\alpha = \frac{\Delta\lambda}{F_0} = c_k \frac{F}{F_0} = c_k \beta. \quad (171)$$

Суммирование дает профиль всей линии, в который вносят вклад все компоненты  $k$ :

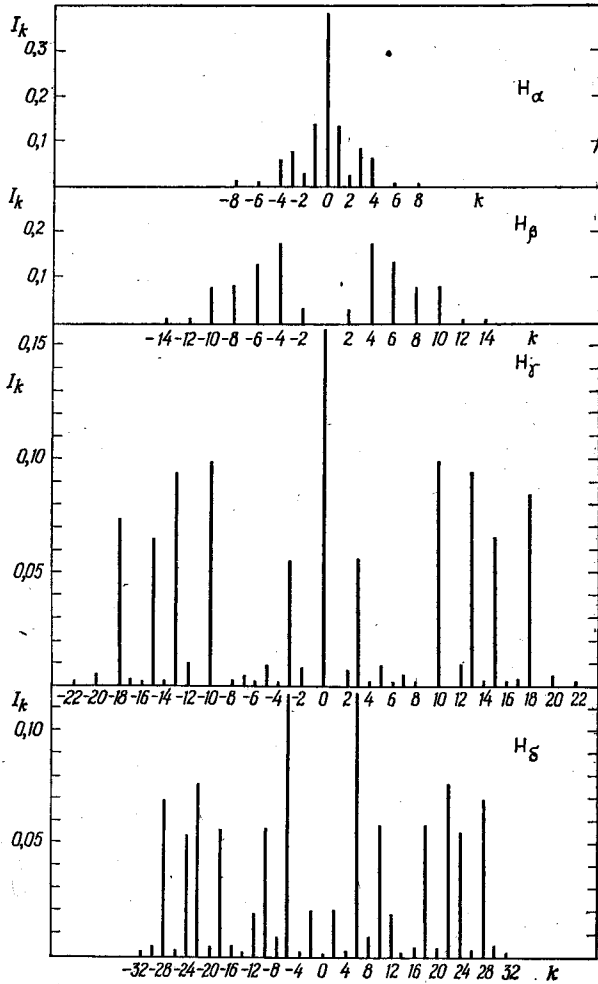
$$S(\alpha) d\alpha = \sum I_k W\left(\frac{\alpha}{c_k}\right) \frac{d\alpha}{c_k}. \quad (172)$$

Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) d\alpha = 1 \quad (173)$$

соответствует условию  $\sum I_k = 1$ . Следует упомянуть, что  $S(\alpha)$  включает  $\delta$ -функцию, если  $I_0 \neq 0$ <sup>1)</sup>.

Для случая некоррелирующих возмущающих частиц (распределение Хольцмарка) обширные таблицы  $S(\alpha)$ <sup>2)</sup> для линий серий Лаймана, Баль-



Ф и г. 2.4. Штарковское расщепление первых линий серии Бальмера.

<sup>1)</sup> В литературе по этому вопросу есть некоторая несогласованность. Унзолд [40] и другие используют обозначение  $I_k = f_k/n'^2 f$  и включают несмещенную компоненту в определение  $S(\alpha)$ , тогда как Андерхилл и Ваддель [41] предпочитают использовать  $f_k = f_k/n'^2 f_{\pm}$  и исключают несмещенную компоненту, которая затем рассматривается отдельно. Здесь  $f_k$  — значение  $f$  для компоненты  $k$ ,  $f_{\pm}$  — вклад всех смещенных компонент. Главное квантовое число  $n'$  нижнего уровня входит в эти выражения, так как интенсивность пропорциональна значениям  $f$ , умноженным на статистический вес конечного (нижнего) состояния.

<sup>2)</sup> Величина  $\alpha$  выражена в Å на электростатическую единицу напряженности поля.

мера, Пашена и Брэкетта вплоть до главного квантового числа верхнего уровня  $n = 18$  имеются в [41]. Таблицы значений  $f_k$ , приведенные в этой работе, облегчают расчеты профилей для других распределений полей, например для распределения Эккера [25] или Баранже — Мозера [23, 24], которые учитывают эффекты экранировки. Некоторые профили линий для этих распределений приводятся в [42] (табл. 4.3)<sup>1)</sup>.

Для запертых водородных линий, которые часто встречаются в лабораторных источниках и звездных спектрах, особый интерес представляет асимптотическое поведение профиля линии в далеких крыльях. Если использовать распределение Хольцмарка, которое для  $\beta \geq 5$  можно с достаточной точностью представить первым членом асимптотического разложения (94), то получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S(\alpha) d\alpha = \frac{1,496}{\alpha^{5/2}} \sum I_k c_k^{3/2} d\alpha = 3,98 \cdot 10^{-3} \lambda^3 \sum I_k k^{3/2} F_0^{3/2} \Delta \lambda^{-5/2} d\Delta \lambda. \quad (174)$$

Сумму  $\sum I_k k^{3/2}$  можно взять из таблицы на стр. 84 или рассчитать, следуя приближению Ван-Дина [38]; в других случаях коэффициенты  $3,98 \cdot 10^{-3} \lambda^3 \sum I_k k^{3/2}$  легко получить из таблиц для  $S(\alpha)$  в [41].

Следует, однако, ясно представлять, что эта формула для крыла линии справедлива только в том случае, если условие  $\Delta \lambda > F_0 c_k \beta$  с  $\beta = 5$  выполняется для всех компонент. Отсюда получаем соотношение

$$\Delta \lambda > 1,2 \cdot 10^{-10} \lambda^2 n_e^{2/3} n^2, \quad (175)$$

которое является очень сильным ограничением для больших квантовых чисел; см. также [44].

До сих пор расчет уширения водородной линии мы проводили согласно хорошо разработанным теориям и не встречались с существенными трудностями. Они возникают в связи с учетом вклада электронов. Первые попытки учесть эти эффекты на основе классических ударных теорий были сделаны Гримом [45] и позже Колбом [18]. Согласно такому подходу, уширение каждой компоненты  $k$  описывается дисперсионным профилем. Постоянная затухания  $\gamma$  определяется формулой (66) с постоянной взаимодействия (167). Если исключить неадиабатические столкновения, индуцирующие переходы, и предположить, что столкновения электронов статистически независимы по отношению к мгновенной величине микрополя, обусловленного ионами, то профиль одной компоненты является результатом свертки:

$$P_k(\Delta\omega) = \int_0^{\infty} W \left( \frac{\Delta\omega'}{F_0 c_{2,k}} \right) \frac{1}{\pi} \frac{1/2\gamma}{(\Delta\omega - \Delta\omega')^2 + (1/2\gamma)^2} \frac{d\Delta\omega'}{F_0 c_{2,k}}, \quad (176)$$

а профиль всей линии дается выражением

$$P(\Delta\omega) = \sum_k I_k P_k(\Delta\omega). \quad (177)$$

Предполагается, что доплеровским уширением можно пренебречь.

Для очень далеких крыльев линии это интегрирование (свертку) можно выполнить очень просто путем сложения  $S(\alpha) \approx \Delta \lambda^{-5/2}$  [условие (175)] и дисперсионного профиля, что приводит к следующему результату:

$$P(\Delta\lambda) \approx F_0^{3/2} \Delta \lambda^{-5/2} [1 + R(n_e, T) \Delta \lambda^{1/2}]. \quad (178)$$

Коэффициент  $R(n_e, T)$ , порядка единицы, определяет относительный вклад электронных столкновений. Эту простую формулу, которую мы уточним ниже, следует применять с осторожностью, потому что сравнение теорети-

<sup>1)</sup> Контуры для профилей тех же линий, которые приведены в таблицах Андерхилл и Вадделя, имеются в [43].

чески рассчитанных профилей линий с результатами недавних экспериментов указывает на серьезные недостатки такого рода теории.

Новая эра в рассмотрении вопроса о вкладе электронов в расчет профиля линии началась с появлением статей Баранже [31, 46, 47] и Колба и Грима [48], в которых развивалась обобщенная квантовомеханическая ударная теория, принимающая во внимание эффекты неадиабатичности при столкновениях. Основные идеи этой теории излагались в § 3, п. 5 и 6; полученные результаты [формула (161)] можно использовать для водородных линий при использовании упрощающего предположения о полном вырождении. Это означает, что при расчете столкновений с электронами штарковским расщеплением в поле иона пренебрегают и принимают, что все  $z_{ik} = \omega_{ik}\rho/v$  равны нулю.

Как впервые отметил Ван-Регемортер [49], это допущение может быть неоправданным для высших членов серии, потому что произведение средней разности энергий

$$\overline{\Delta\omega} = C_2 n_e^{2/3} \approx n^2 n_e^{2/3}$$

на среднее время столкновения

$$\overline{\rho}v^{-1} = n_e^{-1/3}v^{-1} \approx 10^{-8}n_e^{-1/3}$$

больше единицы для достаточно больших  $n$ . Требование полного вырождения оказывается особенно критичным для столкновений с параметром  $\rho$ , сравнимым с дебаевским радиусом  $D$ .

Из предположения  $z_{ik} = 0$  следует, что  $A(z) = 1$  и  $B(z) = 0$  (см. фиг. 2.3), так что здесь учитываются только неадиабатические столкновения. В первой статье, в которой имеются определенные численные результаты, Грим и др. [50] приходят к следующему выражению для объема возмущения:

$$V_p(s) = -\pi s \int_0^\infty W(v) v dv \left[ \rho_W^2 + 2\rho_W^2 \ln \frac{\rho_D}{\rho_W} \right]. \quad (179)$$

В этой формуле первый член в скобках определяет относительный вклад сильных столкновений, которые полностью нарушают процесс излучения:

$$\rho_W = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{e^2}{\hbar^2} \frac{\langle r_a r_a \rangle^{1/2}}{v} \approx \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{\hbar}{mv} n^2. \quad (180)$$

Величина  $\rho_W$  составляет примерно  $1/3$  радиуса Вайскопфа, для которого фазовый сдвиг в классической теории равен единице. Логарифмический член в скобках описывает вклад сильных столкновений. Интегрирование по предельному параметру ведется до дебаевского радиуса  $\rho_D = D$ . Окончательное выражение для профиля рассчитывается в основном таким же образом, как и в классической ударной теории. Возникает, однако, усложнение, обусловленное недиагональными элементами оператора  $\phi$ . Грим в [42]<sup>1)</sup> представил результаты расчета для ряда линий лаймановской и балмеровской серии  $Ly_\alpha, Ly_\beta, H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$  для температур электронов  $10^4, 2 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4$  и плотностей электронов от  $10^{14}$  до  $10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Эта сетка параметров является достаточно частой для интерполяции с необходимой точностью. Область параметров охватывает почти все интересные случаи.

Прежде чем обсуждать вопрос о сравнении этих профилей с экспериментальными данными, рассмотрим более детально асимптотическую формулу для крыла линии, которая важна для запертых линий. Это не единственное приложение, для которого важно нахождение формул для крыла линии.

<sup>1)</sup> См. табл. 4.3 в его книге. Эти профили, называемые приведенными штарковскими профилями  $S(\alpha)$ , не совпадают с нашим приведенным статическим профилем  $S(\alpha)$ .



Они представляют для нас особый интерес также и потому, что применимость ударной теории становится сомнительной при большой величине  $\Delta\omega$ , сравнимой с граничной частотой [формула (69)]. Первое полное обсуждение вопроса было дано Гримом [51], который в основном опирается на статью Льюиса [52], касающуюся понятия «неполных» столкновений, т. е. модификации ударного приближения, когда время  $s$  меньше, чем длительность столкновения  $\rho/v$ . Льюис вычисляет член второго порядка теории возмущений для случая конечных пределов интегрирования по времени и получает модифицированную формулу (179), в которой член  $\ln(\rho_D/\rho_W)$  заменяется на  $\ln(sv/\rho_W)$ , если  $sv < \rho_D$ . Поэтому и Грим должен заменить простую формулу (178) для интенсивности в крыле линии на более сложное выражение.

Записав формально

$$P(\Delta\omega) \approx F_0^{3/2} \Delta\lambda^{-5/2} (1 + A\Delta\lambda^{1/2}), \quad (181)$$

мы имеем три различных выражения для  $A$ , зависящих от величины  $\Delta\lambda$ . Для далекого крыла линии

$$\Delta\lambda > \Delta\lambda_W = \lambda^2 \frac{kT}{ch n^2} \quad (182)$$

профиль линии определяется функцией  $\phi(s)$  для  $s < \rho_W/v$ , так что даже несильные столкновения могут быть «полными» за это время, и, следовательно, статическая теория применима также и для электронов. Отсюда ясно, что второй член в скобках в (181) должен не зависеть от  $\Delta\lambda$  и быть равным единице. Тогда имеем

$$A = \Delta\lambda^{-1/2} \text{ для } \Delta\lambda > \Delta\lambda_W. \quad (183)$$

Если, с другой стороны,

$$\Delta\lambda < \Delta\lambda_p = \lambda^2 \left( \frac{n_e e^2}{\pi m c} \right)^{1/2} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \Delta\omega_p \quad (184)$$

или

$$\Delta\omega < \Delta\omega_p = \left( \frac{4\pi n_e e^2}{m} \right)^{1/2} \approx \frac{v}{\rho_D} \quad (185)$$

( $\Delta\omega_p$  — ленгмюровская частота), то оказывается применимой чисто ударная теория и

$$A = \Delta\lambda_W^{-1/2} + R(n_e, T). \quad (186)$$

Дело в том, что время  $s$ , соответствующее  $\Delta\omega$ , настолько велико, что не только сильные столкновения, описываемые членом  $\Delta\lambda_W^{-1/2}$ , но также и слабые столкновения могут быть «полными» за этот интервал времени. Если

$$\Delta\lambda_p < \Delta\lambda < \Delta\lambda_W,$$

то слабые столкновения являются «полными» только частично, и, используя результат Льюиса, Грим получает

$$A = \Delta\lambda_W^{-1/2} + R(n_e, T) \frac{\ln \Delta\lambda_W - \ln \Delta\lambda}{\ln \Delta\lambda_W - \ln \Delta\lambda_p}. \quad (187)$$

Пфенниг и др. [44] объединяют условие для крыла (175) с требованием, чтобы реально существовала переходная область ( $\Delta\lambda_p < \Delta\lambda_W$ ) и утверждают, что применять простую формулу для крыла типа (181), можно, только если выполняется условие

$$n^2 n_e^{1/6} < 2,4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1/2}. \quad (188)$$

Это условие является серьезным ограничением на область применимости.

Множитель  $R(n_e, T)$ , определяющий относительный вклад слабых столкновений, табулирован Гримом [42]. Согласно Гриму [51, 53, 54], приближенные значения  $R(n_e, T)$  можно вычислить по следующей формуле:

$$R(n_e, T) = 31 \left( \frac{Z^3}{T} \right)^{1/2} \frac{n'^5 + n^5}{n^3 n'^2 (n^2 - n'^2)^{1/2}} \lg \frac{4 \cdot 10^8 T Z}{n^2 n_e^{1/2}}. \quad (189)$$

Здесь  $n'$  и  $n$  — главные квантовые числа нижнего и верхнего уровней соответственно. Эффективный заряд атома равен  $Z$  ( $Z = 1$  для нейтрального водорода).

Более строгое математическое рассмотрение вклада электронов с помощью автокорреляционной функции для поля электронов дано в [55]. Численные результаты для  $Ly_\alpha$ , приводимые в этой статье, показывают, что для  $n_e = 10^{17}$  вклад электронов для  $\Delta\lambda \geq \Delta\lambda_p$  уже почти одинаков с вкладом ионов, так что, согласно результатам этой работы, статическая теория применима также и для электронов в интервале  $\Delta\lambda_p < \Delta\lambda < \Delta\lambda_w$ .

Недавно Грим [56], выводя выражения для поправок к асимптотической формуле для крыла линии, попытался учесть в явном виде тот факт, что  $\Delta\lambda_w$  и выбор пределов интегрирования по Льюису зависят от скорости возмущающих частиц.

Из этого обсуждения видно, что современное состояние вопроса является неудовлетворительным, что обусловлено отсутствием единой теории для вклада электронов. Согласно описанным выше доводам Ван-Регемортгера [49], формулы для высших членов серии становятся неприменимыми. Видаль [57] отмечает, что формула для крыла при  $\Delta\lambda_p < \Delta\lambda < \Delta\lambda_w$  является исключительно интерполяционной; член  $\Delta\lambda_w^{-1/2}$ , описывающий сильные столкновения, следует подбирать так, чтобы выражения для  $A$  согласовывались с условием  $\Delta\lambda = \Delta\lambda_w$ . Эту трудность сшивания обеих областей при  $\Delta\lambda_w$  можно связать с тем, что Льюис [52] рассматривает столкновения как эффект, определяющий члены второго порядка в разложении теории возмущений, в то время как в статической теории ( $\Delta\lambda > \Delta\lambda_w$ ) столкновения — это эффект первого порядка, который ответствен за уширение. В настоящее время положение обстоит так: профили сшиваются в точке  $\Delta\lambda_w$ , хотя нет действительной связи между физическими теориями в двух различных областях по обе стороны от этой граничной точки.

С точки зрения согласования теоретических и экспериментальных результатов положение также далеко не удовлетворительно. Ранние экспериментальные измерения профилей водородных линий, уширенных из-за эффекта Штарка, казалось находились в хорошем согласии с теорией ударного уширения электронами (см., например, обсуждение Баранже [30]). Недавние эксперименты Больдта и Купера [58] по определению профиля линии  $Ly_\alpha$  в электрической дуге ( $n_e = 8,4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $T = 12\,200^\circ \text{ K}$ ) и особенно работы Видаля [57] (см. также [59]), которым предшествовали эксперименты Фергюсона и Шлютера [60] по измерению профилей бальмеровских линий вплоть до  $n = 15$  (ВЧ-разряд,  $n_e = 1,4 \cdot 10^{13}$ ,  $T = 1850^\circ \text{ K}$ , возбуждение обусловлено небольшой группой быстрых электронов), указывают, однако, на заметные отклонения теоретических профилей от экспериментальных профилей. Очень тщательный анализ Пфеннига [27] показывает, что распределение интенсивности в крыльях, измеренное Видалем, в широком интервале значений  $\Delta\lambda$  с высокой точностью может описываться чисто статической теорией для ионов и электронов. Для расчета распределения микрополей необходимо использовать подходящий множитель  $r_0/D$ , который примерно в 2 раза больше, чем множитель, определенный из теории Дебая.

Из предшествующего обсуждения следует, что в настоящее время нет простого рецепта, базирующегося на хорошо обоснованной теории, который можно было бы рекомендовать тем, кто хочет интерпретировать измеренные

профили линий водорода или водородоподобных ионов. Возможно, что лучшим, хотя и в какой-то мере эвристическим путем, является следующий:

а) Выразить измеренный профиль (линии испускания или поглощения) в шкале интенсивностей.

б) Проверить, происходит ли поглощение или излучение в ядре линии в оптически тонком слое или нет (см. гл. 2) и, если это необходимо, привести профиль к случаю оптически тонкого слоя. Кроме того, необходимо также выполнить нормировку профиля.

в) Если наблюдается слияние высших членов серии, то определить по [61] или [62] (см. следующие страницы) плотность электронов  $n_e$  и рассчитать  $\Delta\lambda_w$  и  $\Delta\lambda_p$ . Необходимы дополнительные (хотя бы грубые) сведения о температуре.

г) Если плазма в ядре линии является оптически толстой, то большее внимание следует уделить интерпретации уширения в крыльях. Статистическая теория для ионов и электронов применима, если  $\Delta\lambda > \Delta\lambda_w$ , а также если профиль крыла можно представить в виде  $I(\Delta\lambda) \approx \Delta\lambda^{-m}$  с  $m$ , близким к 2,5. Если этот случай не реализуется, то для крыла следует использовать модифицированную формулу Грима (181). Дебаевской экранировкой можно пренебречь только при низких требованиях к точности или при очень низких плотностях электронов.

д) Если профиль в ядре линии измерен с высокой точностью (оптически тонкие линии), то профили, приведенные в [42], дают хорошее теоретическое описание.

е) В том случае, когда линия оказывается очень узкой (низкие плотности электронов), эффект Доплера, обусловленный тепловым или турбулентным движением, которым обычно пренебрегают, вызывает дополнительное поддающееся измерению уширение. При  $n_{\text{газ}}/n_e > 10^3$  нужно также рассматривать влияние резонансного уширения [63].

Ниже мы обсудим две особые проблемы, связанные с уширением водородных линий.

а) В современных лабораторных экспериментах, использующих для удержания плазмы внешнее магнитное поле, или в пинчах профили линий могут изменять сильные магнитные поля, которые можно считать однородными в окрестности возбужденного атома. Это влияние зеемановского расщепления на уширение линий было рассмотрено недавно. Эрман и др. [64] рассчитали смещение и интенсивности компонент линии, когда атом водорода находится в однородных электрическом и магнитном полях. Во второй статье Нгуен-Хо и др. [65] рассчитаны профили линий  $Ly_\alpha$ ,  $Ly_\beta$  и  $H_\alpha$  для источников с распределениями микрополей, соответствующими плотностями электронов  $10^{15} \leq n_e \leq 10^{18}$  и магнитному полю  $\mathcal{H} \leq 1,2 \cdot 10^5$  гс. Рассмотрены две важные ориентации магнитного поля: параллельно и перпендикулярно лучу зрения. Из результатов этой статьи следует, что магнитное поле оказывает влияние на профиль линии при условии

$$\tau = \frac{\text{Эффект Штарка, обусл. средней величиной электр. микрополя}}{\text{Эффект Зеемана, обусловленный внешним полем}} \leq 1. \quad (190)$$

Величина

$$\tau = \frac{3/2 n (n-1) (\hbar^2/mc) F_0}{[(n-1)! \hbar/2mc] \mathcal{H}} = \frac{3}{2} n A_0, \quad (191)$$

где

$$A_0 = 3,43 \cdot 10^{-7} \frac{n_e^{2/3} [\text{см}^{-3}]}{\mathcal{H} [\text{гс}]}, \quad (192)$$

пропорциональна главному квантовому числу верхнего уровня  $n$ , так что для больших членов серии Штарк-эффект становится более важным, чем эффект Зеемана. В пределе при  $\mathcal{H} \rightarrow 0$  профили, рассчитанные Нгуен-Хо и др., совпадают с профилями, рассчитанными Гримом и др. [50].

б) В 1939 г. Инглис и Теллер показали, что слияние линий, уширенных из-за штарк-эффекта, может явиться очень удобным средством для определения плотности электронов в источнике света. Следует просто определить, при каком главном квантовом числе  $n_{\text{макс}}$  линии водорода или водородо-подобных ионов становятся невидимыми, «растворяясь» в квазиконтинууме, образованном их соседями. Хорошо известно, что этот континуум непрерывно переходит в истинный континуум, обусловленный свободно-связанными переходами.

Авторы определили последнюю линию, которую можно разрешить в серии, следующим образом: для нее штарковское расщепление, соответствующее средней величине микрополя

$$\bar{F} = 3,7en^2/s, \quad (193)$$

равно половине разности энергий двух соседних термов. Если мы обозначим эффективный заряд иона через  $Z$  (у нейтрального атома  $Z=1$ ), то это условие приведет к следующему уравнению:

$$\frac{3a_0 n_{\text{макс}}^2 e^2 \bar{F}}{2Z} = \frac{e^2 Z^2}{2a_0 n_{\text{макс}}^3}, \quad (194)$$

из которого вытекает важное соотношение

$$\lg n = 23,26 - 7,5 \lg n_{\text{макс}} + 4,5 \lg Z. \quad (195)$$

Вклад электронов в крыло линии описывается статической теорией, если

$$T < \frac{4,6 \cdot 10^8 Z}{n_{\text{макс}}}, \quad (196)$$

так что если это условие выполнено, то

$$n = n_e + n_i. \quad (197)$$

В противном случае  $n$  должно быть меньше, чем эта сумма, приближаясь для очень высоких температур к плотности ионов  $n_i$ . Точность метода ограничена ошибкой порядка двух в плотности электронов, обусловленной некоторыми упрощениями, и тем, что трудно решить, какая линия является действительно «последней различимой линией».

Видаль [62], основываясь на улучшенном рассмотрении этой же задачи, предлагает использовать контрастность

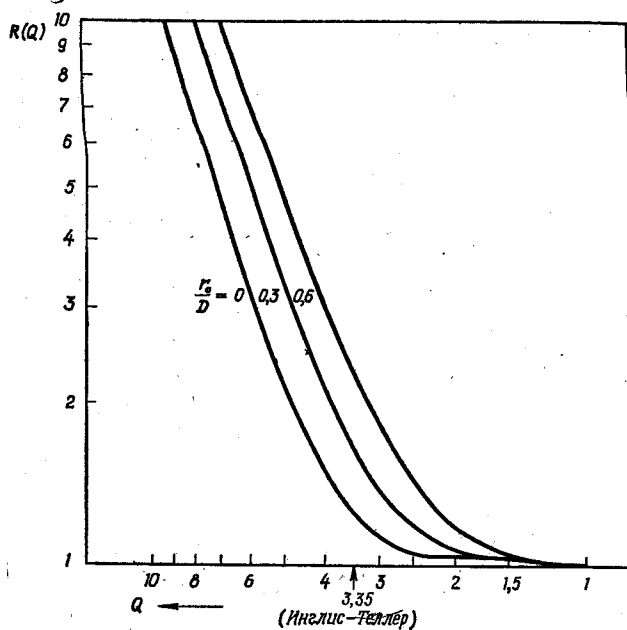
$$R(n) = \frac{I_{\text{макс}}}{I_{\text{мин}}}, \quad (198)$$

определенную как отношение ординат огибающих кривых, соответствующих максимуму и минимуму наблюдаемой кривой (приведенной к оптически тонкому слою) спектра испускания. Функция  $R(n)$  зависит от длины волны линии или от соответствующего верхнего главного квантового числа. Эта величина зависит, кроме того, от плотности  $n$  и от частного вида функции распределения полей  $W(\beta, r_0/D)$ . Можно объединить эти величины в новую переменную  $Q$ , которая в основном определяется отношением расстояния между термами к величине уширения <sup>1)</sup>

$$Q = \frac{1,08 \cdot 10^{16} Z^3}{n^{2/3} n^5 (1 - \delta/n)^3}. \quad (199)$$

<sup>1)</sup> Здесь  $\delta$  — квантовый дефект.

Введение величины  $Q$  приводит к универсальным соотношениям для  $R(Q)$ , которые зависят от постоянной экранирования  $r_0/D$  как от параметра. Эти соотношения представлены на фиг. 2.5.



Фиг. 2.5. Функции  $R(Q)$ , используемые Видалем [62] для определения плотностей электронов.

и определить  $n_e$ . Если это условие выполнено и если  $n_e < Z^{4.5} \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , то Видаль утверждает, что точность метода составляет 5% для нейтральных атомов и 10% для ионов.

Для определения плотностей электронов их можно использовать следующим образом:

а) Оценить  $n_{\text{макс}}$  и использовать формулу Инглиса — Теллера для получения приближенных значений  $n_e$ . Комбинируя  $n_e$  с оцененным или известным значением  $T$ , можно рассчитать дебаевский радиус  $D$  и  $r_0/D$ .

б) Определить  $R(n)$  для различных  $n$  и подставить эти измеренные значения в соответствующую функцию  $R(Q)$ . Найти  $Q$  и для расчета  $n$  использовать формулу (199), в которой все другие величины известны.

в) Проверить, выполняется ли условие (196),

## 2. УШИРЕНИЕ ЛИНИЙ He I И ДРУГИХ ЛИНИЙ

### В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Электроны и ионы взаимодействуют с атомами, в которых снято вырождение по  $L$  в соответствии со следующей схемой.

а) Заряженная возмущающая частица поляризует атом, индуцируя дипольный момент, пропорциональный напряженности электрического поля. Взаимодействие диполя с этим полем описывается с помощью потенциала  $\sim r^{-4}$ , где  $r$  — расстояние до возмущающей частицы (поляризационное взаимодействие, квадратичный эффект Штарка).

б) Заряженная возмущающая частица взаимодействует с атомом, имеющим постоянный квадрупольный момент, который отличен от нуля, если  $L \neq 0$ . Кэйрел [66], а также Брешо и Ван-Регемортер [67, 68] показали, что это квадрупольное взаимодействие с потенциалом  $\sim r^{-3}$  может вносить значительный вклад в уширение линий.

Если потенциальная энергия взаимодействия с возмущающей частицей превышает величину тонкого расщепления, то спинорбитальное взаимодействие разрывается и атом можно снова рассматривать как вырожденную квантовомеханическую систему, к которой применимы теории, изложенные в общих чертах в предыдущей главе. Этот случай, когда происходит переход от квадратичного к линейному эффекту Штарка, реализуется при возрастании плотности возмущающих частиц (увеличивающаяся напряженность поля) и увеличении главных квантовых чисел (уменьшение спинорбитального взаимодействия).

Ограничиваясь квадратичным эффектом Штарка и классической теорией сдвига фазы, мы вначале сравним радиус Вайскопфа

$$\rho_W = \left( \frac{\pi C_4}{2v} \right)^{1/3} \quad (200)$$

со средним расстоянием между возмущающими частицами в плазме, для того чтобы определить, какая теория применима — статическая или ударная. Брешо и Ван-Регемортер [68] рассчитали радиус Вайскопфа в единицах  $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$  (атомные единицы) <sup>1)</sup>:

$C_4/2\pi =$	$10^{-18}$	$10^{-15}$	$10^{-12}$
$T = 5 \cdot 10^3$ °K	1,5	15	150
$1 \cdot 10^4$ °K	1,1	11	110
$2 \cdot 10^4$ °K	0,8	8	80
$4 \cdot 10^4$ °K	0,6	6	60

Сравним его с межчастичным расстоянием  $n^{-1/3}$  (также в атомных единицах)

$n = 10^{18}$	$10^{15}$	$10^{12}$
$n^{-1/3} = 190$	1900	19000

В общем величина  $C_4$  лежит в интервале от  $10^{-18}$  до  $10^{-12}$ , так что, за исключением случаев очень низких температур или очень больших плотностей, число возмущающих частиц в вайскопфовой сфере много меньше единицы, и потому ударная теория правильно описывает уширение.

Другой вопрос: оправданно ли предположение об адиабатичности, лежащее в основе классической ударной теории Линдхольма — Фоли? Это зависит от отношения  $\omega_{ih}\rho/v = z_{ih}$  [формула (163)]. Считая  $\hbar\omega_{ih} = \Delta E$  и  $v = \sqrt{kT/m}$  заданными величинами, мы затабулировали те величины  $\rho = \rho_a$  (атомные единицы), которые соответствуют  $z_{ih} = 2$ . Это значение приближенно отделяет область адиабатических столкновений ( $\rho > \rho_a$ ) от области неадиабатических столкновений ( $\rho < \rho_a$ ).

$\Delta E$ [эв] =	10	4	2	1	0,5	0,1
$T = 5 \cdot 10^3$ °K	0,68	1,3	3,0	6,0	13	68
$1 \cdot 10^4$ °K	0,94	1,9	4,6	9,4	19	94
$2 \cdot 10^4$ °K	1,3	2,6	6,4	13	26	130
$4 \cdot 10^4$ °K	1,9	3,8	9,4	19	38	190

Существенные значения  $\rho_a$  (значения для малых  $\Delta E$ ) явно больше, чем  $\rho_W$  (за исключением случая очень больших  $C_4$ ) <sup>2)</sup>, так что в большинстве случаев следует учитывать эффект неадиабатических столкновений.

Если необходимо рассчитать уширение линий ионов, то может оказаться необходимым отойти от предположения о прямолинейности пути, которое использовалось почти во всех классических и полуклассических теориях, и учесть, что возмущающая частица движется под влиянием силы, обусловленной кулоновским полем иона, по гиперболической орбите. Как известно, легкая частица (электрон) отклоняется при кулоновском столкновении на угол  $90^\circ$ , если

$$\rho = \rho_C = \frac{Ze^2}{mv^2} \approx \frac{Ze^2}{kT} \quad (201)$$

При заряде иона  $Z = 1$  эта величина  $\rho_C$  (атомные единицы) равна

$T = 5 \cdot 10^3$ °K	$1 \cdot 10^4$ °K	$2 \cdot 10^4$ °K	$4 \cdot 10^4$ °K
$\rho_C = 63,2$	31,6	15,8	7,9

<sup>1)</sup> В [67, 68]  $C_4$  определено соотношением  $2\pi C_4 = \Delta\omega r^4$ .

<sup>2)</sup> Следует упомянуть, что величина  $C_4$  зависит от расстояния до соседних термов [см. (204)].

Если  $\rho_W < \rho_C$ , то необходимо использовать гиперболические орбиты (или соответствующие волновые функции). В этих случаях можно использовать приближенную формулу для адиабатического поляризационного затухания, которую можно вывести из результатов Брешо и Ван-Регемортера [68]:

$$\gamma = 200,8Z^{4/5}C_4^{3/5}T^{-1/2}n_e. \quad (202)$$

Справедливость полуклассического подхода проверяют, сравнивая  $\rho_W$  с прицельным параметром  $\rho_l$ , соответствующим квантовому числу  $l = \rho_l mv/\hbar$  для углового момента возмущающей частицы. Для электронов получены следующие значения  $\rho_W$  (в атомных единицах):

$l =$	1	5	10	20
$T = 5 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$	7,5	37	75	160
$1 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$	5,7	28	57	110
$2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$	3,7	19	37	75
$4 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$	2,8	15	28	57

Величина  $\rho_W$  для средних сил больших значений  $C_4$  соответствует  $l \geq 5$ , так что полуклассический подход оправдан. Для малых же значений  $C_4$  этот классический подход неоправдан и необходимо применение более полной квантовомеханической теории.

Прежде чем приступить к обсуждению неадиабатических теорий и их результатов, приведем формулы для постоянных взаимодействия  $C_4$  и  $C_3$ , которые используются при расчете вклада адиабатических столкновений. Постоянная  $C_4 = \Delta\omega r^{-4}$  тесно связана с поляризуемостями  $\alpha_i$  атома, находящегося на ближайших возмущающих уровнях. Согласно теории возмущений, средняя (по ориентациям поля) поляризуемость может быть представлена формулой

$$\bar{\alpha}_i = \frac{2e^2}{3\hbar} \sum_j \frac{|\langle i | \mathbf{r} | j \rangle|^2}{w_{ij}}, \quad (203)$$

что приводит к следующему выражению для  $C_{4,i}$ :

$$C_{4,i} = \frac{e^2}{2\hbar} \bar{\alpha}_i = 7,8 \cdot 10^{-5} \sum_j f_{ij} \lambda_{ij} \quad (204)$$

( $\lambda$  — в мк, величины  $f_{ij}$  отрицательны для испускания). Из результатов, полученных в § 3, п. 4 [формула (148)], следует, что для адиабатических столкновений

$$C_4 = C_{4,i} - C_{4,f}, \quad (205)$$

если  $i$  и  $f$  — ближайшие возмущающие уровни. Для  $C_4$  нельзя с разумной точностью дать простой приближенной формулы, поскольку  $C_4$  критическим образом зависит от расстояния до соседних уровней и сил осцилляторов для переходов на эти уровни. Положительные и отрицательные вклады в суммы в формулах (203) и (204) могут взаимно сокращаться.

Для атомов, которые не обладают сферической симметрией ( $L \neq 0$ ), квадрупольный вклад в уширение при адиабатических столкновениях был оценен Брешо и Ван-Регемортером [67]. Постоянная взаимодействия имеет вид

$$C_3 = \frac{e^2 a_0^2}{\hbar} \beta, \quad (206)$$

где

$$\beta = \left[ \frac{4}{15} (2L+1) C_{L2L} \right]^{1/2} r^3. \quad (207)$$

Средний квадрат радиуса атома  $\bar{r}^2$  (в атомных единицах) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\bar{r}^2 = \frac{n^2}{2Z^2} [5n^2 + 1 - 3L(L+1)]. \quad (208)$$

Наконец, значения  $(2L+1)C_{L2L}$  равны

$$\begin{array}{ccccccc} L=0 & 1 & 2 & 3 & \gg 1 \\ (2L+1)C_{L2L} = 0 & 4/5 & 4/7 & 8/15 & \approx 1/2 \end{array} \quad (209)$$

Брешо и Ван-Регеморттер [68] приводят удобную формулу для расчета квадрупольного вклада в величину  $\gamma$ :

$$\begin{array}{l} \text{Нейтральные атомы: } \gamma_q = 6,05 \cdot 10^{-8} n_e (\beta_i - \beta_f), \\ \text{Положительные ионы: } \gamma_q = 4,96 \cdot 10^{-5} Z^{2/3} T^{-1/2} n_e (\beta_i - \beta_f)^{2/3}. \end{array} \quad (210)$$

Простой, но эффективный метод объединения этих значений  $\gamma_q$  с величинами  $\gamma_p$ , обусловленными упругим поляризационным взаимодействием, заключается в том, чтобы взять наибольшее из двух значений.

Теперь обратимся к результатам полуклассической ударной теории, которая в общих чертах была изложена в § 3, п. 6, и которая включает адиабатические эффекты таким образом, что для изолированных линий ширина определяется полностью неадиабатическими столкновениями, а адиабатические столкновения дают вклад только в сдвиг линии. Эта теория развивалась Гримом и др. [33] и была применена для 24 изолированных линий HeI. Небольшой вклад возмущающих ионов рассчитывается при двух упрощающих предположениях:

а) взаимодействие адиабатическое, что оправдывается медленным движением возмущающих частиц,

б) используется скалярный закон сложения возмущений.

Эта часть теории в основном развивается в направлении, указанном Андерсоном и Толменом [9], которые получили результаты, охватывающие в качестве предельных случаев модифицированную (из-за упрощения «б») статическую теорию и, с другой стороны, адиабатическую ударную теорию. Детали читатель может найти в оригинальной статье. Обширные таблицы, включающие большое число изолированных линий нейтральных и одноэлектронных ионизованных атомов (от He до Ca и для Cs) рассчитаны Гримом [70, 2], использовавшим дипольные матричные элементы, вычисленные в кулоновском приближении Бейтса и Дамгаард [71]. В этих таблицах [42] приведены значения (половины) полуширины  $w$  [Å] для плотности электронов  $10^{16} \text{ см}^{-3}$  (коэффициент преобразования к другим электронным плотностям  $10^{-16} n_e$ ), относительный сдвиг  $d/w$  (который не зависит от  $n_e$ !), и параметр электронного уширения, учитывающий асимметрию линии,

$$\alpha = \left( \frac{C_4 F_0^2}{w} \right)^{3/4} \quad (211)^1$$

коэффициент преобразования  $10^{-4} n_e^{1/4}$ ). Полная ширина на половине максимальной интенсивности определяется по формуле (Визе [72])

$$\Delta\lambda_{1/2} [\text{Å}] = 2w \cdot 10^{-16} n_e (1 + 1,75 \cdot 10^{-4} \alpha n_e^{1/4} q), \quad (212)$$

сдвиг <sup>2)</sup>

$$\Delta\lambda_s [\text{Å}] = w \cdot 10^{-16} n_e \left( \frac{d}{w} + 2 \cdot 10^{-4} \alpha n_e^{1/4} q \right), \quad (213)$$

<sup>1)</sup> Этот параметр представляет собой отношение величины статического уширения электронной ударной полуширины в степени  $3/4$ .

<sup>2)</sup> Знак минус используется только в очень специальных случаях.



где

$$q = 1 - 0,068 \cdot n_e^{1/2} T^{-1/2}. \quad (214)$$

Эти легко измеримые величины дают всю существенную информацию о плотности электронов в плазме.

Полные профили изолированных линий  $j(x)$ , нормированные в приведенной шкале длин волн

$$x = \frac{\lambda - \lambda_0 - d}{w} \quad (215)$$

[расстояние в шкале длин волн от центра сдвинутой линии в единицах (половины) полуширины] также табулированы Гримом [42]. Они зависят от параметра ионного уширения и от параметра

$$\sigma = 8 \cdot 10^{-2} w \lambda^{-2} \left( \frac{T}{\mu} \right)^{-1/2} n_e^{2/3}. \quad (216)$$

[ $\lambda$  — в Å; величина  $w$  [Å] — электронная ударная полуширина (ее половина) для  $n_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $\mu$  — молекулярный вес возмущающих частиц.] Этот параметр вводит в расчеты скорости ионов. Взаимодействие имеет ударный характер для  $\sigma \approx 1$ ; при  $\sigma \gg 1$  преобладает статический характер взаимодействия с ионами. В пределе  $\sigma \rightarrow \infty$  для статического поля иона имеем

$$j(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W(\beta, r_0/D) d\beta}{1 + (x - \alpha^{4/3} \beta^2)^2}, \quad (217)$$

где  $\beta = F/F_0$ . Функция  $W(\beta, r_0/D)$  есть нормированное распределение полей для параметра экранирования

$$\frac{r_0}{D} = \frac{(4/3\pi n)^{-1/3}}{D}, \quad (218)$$

$D$  — дебаевский радиус.

Эта теория была подтверждена результатам эксперимента. Берг и др. [73] использовали плазму, нагретую в ударной трубе, с плотностью электронов порядка  $(1,2-1,6) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и температурой  $(2-5) \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ . Они обнаружили, что для линий HeI ширины и сдвиги в основном совпадают с предсказаниями теории. Используя гелиевую плазму в электрической дуге, Боттихер и др. [74] вновь смогли подтвердить превосходство неадиабатической ударной теории над ранними ударными адиабатическими теориями, приводившими к значениям полуширин с ошибкой 30%. Наконец Родер и Стампа [75], используя в основном такую же дугу, подтвердили, что не только ширины линий, но также и параметры асимметрии  $\alpha$  правильно предсказываются теорией.

Обзор экспериментальных работ по линиям HeI, включающий результаты измерений Вульфа [76], можно найти в обзоре Визе [72]. В нем представлены результаты измерений в цезии [77], кислороде [78] и азоте [79]. Во всех случаях имеется надежное согласие теории и эксперимента. Расхождения для аргона [80] можно отнести за счет неправильных значений вероятностей переходов. После пересмотра вероятностей достигнуто согласие и в этом случае.

Для ионных линий имеются гораздо большие расхождения. Только для некоторых линий NII [81] эксперименты подтвердили теорию. В большинстве других случаев наблюдаемые ширины превосходят теоретические значения в 2 и более раз (до 10). Грим [54, 56] рассмотрел эти расхождения и нашел, что для уширения ионной линии:

а) нельзя использовать предположение о прямолинейности пути и следует рассматривать гиперболические орбиты; это утверждение согласуется с выводами Брешо и Ван-Регемортера [67, 68], которые указывают на важность кулоновского взаимодействия;

б) уширение возрастает, если из-за кулоновского ускорения возмущаемым атомом увеличивается частота столкновений, приводящих к переходам между верхним и нижним состояниями.

После введения поправки на эти эффекты согласие для ширины линий  $\text{CaI}$ ,  $\text{CaII}$ ,  $\text{SrI}$ ,  $\text{SrII}$  и  $\text{CaII}$  становится более удовлетворительным.

*Вывод.* Таблицы Грима [42], содержащие параметры штарковского уширения для изолированных линий, можно с уверенностью использовать для нейтральных атомов; для линий же ионов могут потребоваться поправки.

Для нескольких линий Брешо и Ван-Регемортер [68] рассчитали отдельные постоянные затухания для неадиабатических неупругих электронных столкновений  $\gamma_{\text{неуп}}$ , для адиабатических поляризующих столкновений  $\gamma_p$ , для адиабатических столкновений с квадрупольным взаимодействием  $\gamma_q$ . Следующие данные, взятые из их результатов, показывают важность квадрупольного взаимодействия:

	HeI 418 - 31P $T = 2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$	NaI $3^2S_{1/2} - 3^2P_{1/2}, 3/2$ $T = 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$	CaII $4^2S_{1/2} - 4^2P_{1/2}, 3/2$ $T = 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$
$(\gamma_{\text{неуп}}/n_e) \cdot 10^6$	42,3	0,35	1,45
$(\gamma_p/n_e) \cdot 10^6$	0,05	1,32	0,90
$(\gamma_q/n_e) \cdot 10^6$	3,65	0,82	1,75
$(\gamma_{\text{полн}}/n_e) \cdot 10^6$	45,94	2,09	3,77

Недавно Пфенниг и Трефтц [82, 83] рассчитали уширение линий HeI в статическом пределе; они использовали таблицы для штарковского расщепления и относительных интенсивностей линий HeI Пфеннига и Трефтца [84], заменившие данные Фостера [85]. Сравнение с результатами измерений ( $n_e = 1,3 \cdot 10^{13}$ ,  $T = 1880 \text{ }^\circ\text{K}$ , возбуждение небольшой группой электронов с высокой энергией) показывает, что имеется удовлетворительное согласие интенсивностей в крыльях линий. Видаль [57], однако, показал, что в диффузных синглетных линиях красные крылья пропорциональны  $\lambda^{-2}$  (дисперсионный профиль), тогда как в соответствующих триплетных линиях показатель степени весьма близок к  $-5/2$  или совпадает с  $-5/2$ , т. е. с величиной, предсказываемой статической теорией. Во всех расчетах использовались функции распределения полей, учитывающие кулоновское взаимодействие.

### 3. УШИРЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНЫМИ ВОЗМУЩАЮЩИМИ ЧАСТИЦАМИ

Этот тип уширения менее важен в спектроскопии плазмы вследствие того, что взаимодействие с дипольным или высшими мультипольными полями нейтральных частиц всегда менее эффективно, чем взаимодействие с кулоновскими полями возмущающих ионов или электронов. Нейтральная компонента плазмы дает заметный вклад в уширение, если плотность нейтральных частиц превышает плотность заряженных частиц примерно в 1000 раз.

Следует различать два типа взаимодействия:

а) резонансное взаимодействие излучающего атома с идентичными атомами, которые способны поглощать энергию возбуждения излучающего атома,

б) вандерваальсовское взаимодействие, если излучающий атом и возмущающий атом различны.

Оба случая можно проанализировать, рассматривая диполь-дипольное взаимодействие с потенциалом:

$$V = \frac{1}{r^3} [(d_r, d_p) - 3(r_0, d_r)(r_0, d_p)]. \quad (219)$$

Здесь  $d_r$  и  $d_p$  — дипольные моменты излучающего атома и возмущающей частицы соответственно,  $r - r_0$  — вектор, соединяющий обе частицы. Для

резонансного взаимодействия, которое является эффектом первого порядка, векторы  $\mathbf{d}_r$  и  $\mathbf{d}_p$  совпадают (за исключением ориентации), так что в квантово-механической теории следует брать дипольные матричные элементы для одного и того же перехода. Поскольку громадное большинство возмущающих частиц находится в основном состоянии, то это есть переход из возбужденного состояния излучающего атома в основное состояние. В резонансном случае потенциал бинарного взаимодействия двух осцилляторов (219) неаддитивен, так что множественное взаимодействие, необходимое для рассмотрения резонансного уширения при высоких давлениях очень трудно рассчитывать; методика, использованная в пунктах, посвященных теориям статического уширения (§ 2, п. 7—9), здесь также непригодна.

Взаимодействие Ван-дер-Ваальса между различными атомами, не имеющими постоянного дипольного момента (дисперсионное взаимодействие)<sup>1)</sup>, является членом второго порядка в возмущающем диполь-дипольном взаимодействии, который приводит к потенциалу

$$V_{k,l} = \frac{1}{r^6} \frac{2}{3} \sum_{k'} \sum_{l'} \frac{|\mathbf{d}_{kk'}|_r^2 |\mathbf{d}_{ll'}|_p^2}{(E_k - E_{k'})_r (E_l - E_{l'})_p}. \quad (220)$$

Для оценки этого выражения необходимо знать все матричные элементы (или силы осцилляторов) для переходов из возмущенного состояния  $k$  излучающей частицы в состояния  $k'$  и из состояния  $l$  возмущающей частицы во все возможные состояния  $l'$ . Вариационная теория дисперсионных сил, развитая Слэтером и Кирквудом [86], приводит к следующему выражению:

$$V = -\frac{1}{r^6} \frac{3e\hbar}{2\sqrt{m}} \frac{\alpha_r \alpha_p}{(\alpha_r/N_r)^{1/2} (\alpha_p/N_p)^{1/2}}, \quad (221)$$

где  $\alpha_r$  и  $\alpha_p$  — поляризуемости излучающего и возмущающего атомов соответственно с  $N_r$  и  $N_p$  электронами. Это число электронов трудно оценить, поскольку следует учитывать только те электроны, которые дают вклад в поляризуемости  $\alpha$ . Формула (221), хотя в общем и не лучше чем (220), обладает тем преимуществом, что она дает способ расчета вандерваальсовского взаимодействия, исходя из измеренных значений поляризуемости.

#### а. Резонансное взаимодействие

Первая попытка рассмотреть задачу о резонансном уширении была предпринята Хольцмарком [87], использовавшим представления о множественном взаимодействии. Приняв гауссовский профиль, он получил зависимость полуширины от плотности возмущающих частиц вида  $\sqrt{n}$ . Детали этой и других ранних теорий читатель может найти в [88]. Для современных теорий характерно ударное приближение, учитывающее только бинарное взаимодействие. Согласно Маргенау и Ватсону [89], потенциал взаимодействия в первом порядке теории возмущений имеет вид

$$V = \begin{cases} -\frac{2}{3r^3} |d_{12}|^2 & \text{для } m' = 0, \\ +\frac{1}{3r^3} |d_{12}|^2 & \text{для } m' = \pm 1. \end{cases} \quad (222)$$

<sup>1)</sup> Усредненная по ансамблю энергия взаимодействия между атомами или молекулами с собственным дипольным моментом, взвешенная с больцмановским множителем  $\exp(V/kT)$ , для  $V \ll kT$  в первом приближении равна  $-\langle V^2 \rangle/kT$ . Таким образом, и в этом случае, который несуществен для уширения линий, зависимость от расстояния имеет вид  $r^{-6}$ .

Эта формула приводит к следующему выражению для сдвига [возмущенного уровня (в единицах угловой частоты):

$$\Delta\omega = \begin{cases} -\frac{2}{r^3} \frac{e^2}{2m\omega_0} f_{12} & \text{для } m' = 0, \\ +\frac{1}{r^3} \frac{e^2}{2m\omega_0} f_{12} & \text{для } m' = \pm 1. \end{cases} \quad (223)$$

Здесь  $m'$  — магнитное квантовое число возбужденного атома. В (223) матричные элементы для перехода между основным состоянием и возбужденными состояниями выражены через силу осциллятора при поглощении и соответствующую частоту  $\omega_0$ . Средняя величина  $\Delta\omega$  равна нулю, так что это взаимодействие не приводит к истинному сдвигу. Для расчета уширения в ударную теорию Линдхольма — Фоли следует ввести только среднюю абсолютную величину этого взаимодействия с постоянной  $C_3$ :

$$C_3 = \frac{e^2 f_{12}}{2m\omega_0}. \quad (224)$$

В результате получается дисперсионный профиль с постоянной затухания, не зависящей от скорости возмущающей частицы,

$$\gamma = 2\pi^2 \frac{e^2 f_{12}}{2m\omega_0} n. \quad (225)$$

Развиваемый подход справедлив, если радиус Вайскоффа

$$\rho_w = \left( \frac{e^2 f_{12}}{vm\omega_0} \right)^{1/2} \quad (226)$$

мал по сравнению с  $n^{-1/3}$ , так что множественное взаимодействие несущественно. Кроме того, длительность одного столкновения  $\rho_w/v$  должна быть мала по сравнению с обратной шириной линии:

$$\left( \frac{e^2 f_{12}}{m\omega_0} \right)^{1/2} \left( \frac{kT}{M} \right)^{-3/4} \ll \frac{\pi^2 e^2 f_{12}}{m\omega_0} \tilde{n} \quad (227)$$

или

$$1 \ll \pi^2 e \left( \frac{f_{12}}{m\omega_0} \right)^{1/2} \left( \frac{kT}{M} \right)^{3/4} n; \quad (228)$$

здесь  $M$  — масса атома.

Фурсов и Власов [90] впервые обратили внимание на роль передачи энергии в резонансном случае, что приводит к изменению амплитуды излучаемой волны. Они получили дисперсионный профиль с несколько отличной постоянной затухания

$$\gamma = \frac{16}{3} \pi \frac{e^2 f_{12}}{2m\omega_0} n. \quad (229)$$

В [91] на основе полуклассической ударной теории получено выражение для усредненного по направлениям члена второго порядка в разложении теории возмущений

$$\begin{aligned} \left\langle l \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 V(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_2) \right| l \right\rangle_{\text{ср}} &= \frac{1}{v^2 \rho^4} \times \\ &\times \left[ \frac{10}{9} \langle l_r | d | i_r \rangle \langle i_r | d | l_r \rangle \langle l_p | d | i_p \rangle \langle i_p | d | l_p \rangle - \right. \\ &\left. - \frac{2}{9} \langle l_r | d | i_r \rangle \langle l_p | d | i_p \rangle \langle i_r | d | l_r \rangle \langle i_p | d | l_p \rangle \right]. \quad (230) \end{aligned}$$

Здесь  $l_r$  — начальное (возбужденное) состояние,  $i_r$  — конечное (основное) состояние излучающей частицы,  $l_p$  — начальное (основное) состояние,  $i_p$  — конечное (возбужденное) состояние возмущающей частицы. Если дипольные

матричные элементы заменить соответствующими силами осцилляторов, выполнить интегрирование по прицельному параметру  $\rho$  и усреднить по распределению тепловых скоростей, то для постоянной затухания получим следующее выражение:

$$\gamma = 4\pi \left( \frac{7g_a}{3g_e} \right)^{1/2} \frac{e^2 f_a}{2m\omega_0} n = 6,12\pi \left( \frac{g_a}{g_e} \right)^{1/2} \frac{e^2 f_a}{2m\omega_0} n. \quad (231)$$

Здесь  $g_a$  и  $g_e$  — статистические веса поглощающего (основного) и излучающего (возбужденного) состояний соответственно. Учет в разложении теории возмущений члена четвертого порядка приводит к улучшенному результату:

$$\gamma = 5,48\pi \left( \frac{g_a}{g_e} \right)^{1/2} \frac{e^2 f_a}{2m\omega_0} n. \quad (232)$$

До сих пор теория применяется только для резонансных линий. Можно считать, что полученные результаты описывают уширение только верхнего уровня, поскольку при этом типе взаимодействия основное состояние остается невозмущенным. Для субординатных линий, т. е. переходов между возбужденными состояниями, нет ясного представления о том, как найти ширину линии, зная величину уширения ближайших возмущающих уровней. Естественно, что профиль линии определяется шириной одного из уровней, если другой уровень очень резкий.

Это допущение и теория резонансного уширения в целом подтверждены измерениями Питтака [92] профилей линий HeI, возбуждаемых в холодном газе с плотностью примерно  $7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  электронами с энергией 30 кэВ. Верхний предел плотности электронов, определяемый амбиполярной диффузией медленных электронов, равен  $3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , так что уширение из-за эффектов давления полностью обусловлено резонансным взаимодействием. Эксперименты указывают на огромную разницу в уширении синглетных и триплетных линий, вызванную тем обстоятельством, что из триплетной системы термов переход в основное состояние запрещен. Для синглетных линий наблюдается удовлетворительное согласие с величиной полуширины, предсказываемой теорией Фурсова и Власова [90] [формула (229)].

Северный [93], а также Кэйрел и Травинг [63] независимо показали, что нельзя пренебрегать резонансным уширением низких членов бальмеровской серии в спектрах звезд солнечного типа.

#### 6. Вандерваальсовское уширение

В спектроскопии плазмы необходимость привлекать для интерпретации профилей линий взаимодействие Ван-дер-Ваальса возникает только в холодных газах с низкой степенью ионизации. В этом случае следует различать случай высокой плотности

$$\rho_w = \left( \frac{3\pi C_6}{8\nu} \right)^{1/5} > n^{-1/3}, \quad (233)$$

когда применима статическая теория, и случай низкой плотности, когда адекватное описание дает ударная теория. На первый взгляд оба случая представляются простыми, поскольку вандерваальсовское взаимодействие обладает свойством скалярной аддитивности, так что можно было бы применить простейшую форму статической теории (Маргенау [8]), и строго выполняется одно из основных требований ударной теории — условие статистической независимости фазовых сдвигов.

В действительности положение оказывается гораздо более сложным, и можно найти серьезные расхождения между предсказаниями теории и результатами различных экспериментов. Детали читатель может найти в статье Чена и Такео [95], в которой дан тщательный обзор всех вопросов уширения и сдвига спектральных линий, обусловленных присутствием

посторонних газов, и дана очень полная библиография экспериментальных работ, выполненных к 1957 г.

Имеются два основных расхождения:

1) Линии должны сдвигаться в сторону меньших энергий, если принять очевидное допущение, что взаимодействие Ван-дер-Ваальса усиливается при увеличении энергии возбуждения возмущаемого атома. Эксперименты показывают, что это справедливо, например, для линий щелочных металлов в широком интервале относительных плотностей <sup>1)</sup>, если посторонним газом является аргон или азот. В атмосфере же гелия сдвиги в основном происходят в сторону больших энергий. Из количественных данных следует, что величина отношения полуширины к сдвигу, которая должна быть равна 2,74 согласно ударной теории Линдхольма — Фоли и 2,78 согласно статической теории, не подтверждается результатами экспериментов с различными газами. Были обнаружены почти любые величины этого отношения между 0 и  $\infty$  (см. табл. III в [94]).

2) Как впервые было показано Ольденбергом [95], для резонансной линии ртути  $\lambda = 2736,7 \text{ \AA}$ , излучаемой в атмосфере гелия [позже этот факт получил подтверждение во многих других спектрах металлов (давление паров  $\sim 1 \text{ мм рт. ст.}$ ), в атмосфере благородных газов (давление газа  $\sim 2-10 \text{ мм рт. ст.}$ )], линии сопровождаются полосами, часто как со стороны длинных, так и со стороны коротких волн. Структура этих полос зависит от сорта благородного газа и также от атомных уровней металла; их интенсивности составляют от нескольких сотых до тысячных долей интенсивности линии металла.

Попытки объяснить эти полосы исходя из статической теории, которая всегда играет важную роль на больших расстояниях от центра линии, были сделаны главным образом Престоном [96]. Идея состоит в том, что частота света, поглощаемого системой атом + возмущающая частица, определяется разностью межатомных потенциалов для верхнего и нижнего состояний. Следует предпочесть те частоты, для которых потенциальные кривые как функции расстояния до возмущающей частицы являются параллельными. Максимум и минимум на кривой разности потенциалов определяют коротковолновый и длинноволновый пределы полосы. Эти предположения, выдвинутые уже Ольденбергом [95], далеки от того, чтобы дать полное описание наблюдаемого явления. Конечно, следует отказаться от классического представления о возмущающем атоме, находящемся на определенном расстоянии  $r$  с вероятностью  $w_+(dr)w_-(r)^2$ , и нужно квантовомеханическим путем рассчитать (неустойчивую) конфигурацию возмущаемый атом + возмущающая частица. Это еще не сделано. Поскольку эта проблема не имеет большого значения для диагностики плазмы, мы не будем заниматься ею подробнее.

Все теории уширения из-за взаимодействия Ван-дер-Ваальса страдают тем недостатком, что, за исключением простейших случаев, почти невозможно точно рассчитать постоянные  $C_6$ . Измерения взаимодействия с атомами затруднительны, если это не атомы благородных газов. Взаимодействие молекулами, подобными  $H_2$ ,  $N_2$  и т. д., которое относительно легко изменить, несущественно для диагностики плазмы, поскольку в плазме эти газы в основном находятся в диссоциированном состоянии. Часто используют приближенный расчет Унзольда [40], но он имеет ограниченную ценность для сложных атомов. В формуле (220) Унзольд пренебрегает разностями энергий возмущаемого излучателя  $E_k - E_{k'}$  по сравнению с разностями энергий возмущающей частицы  $E_l - E_{l'}$ , которую можно считать атомом водорода. Тогда суммы «расцепляются» и суммирование можно выполнить

<sup>1)</sup> За единицу плотности взята плотность постороннего газа при  $0^\circ \text{C}$  и давлении атм.

<sup>2)</sup> По поводу определений см. формулу (74).

независимо. Сумму по состояниям возмущающей частицы  $l'$  можно выразить через ее поляризуемость:

$$\sum_{l'} \frac{|d_{ll'}|^2}{E_l - E_{l'}} = -\frac{1}{2} \alpha_l. \quad (234)$$

Если принять, что система является одноэлектронной, то остающаяся сумма равна

$$\sum_{k'} |d_{kk'}|^2 = \overline{e^2 r_k^2} = e^2 a_0^2 \frac{n_*^2}{2Z^2} \{5n_*^2 + 1 - 3l(l+1)\}, \quad (235)$$

где  $n_*$  — эффективное главное квантовое число. Отсюда получается выражение постоянной взаимодействия для уровня  $k$

$$C_{\delta, k} = \hbar V r^6 = \frac{\hbar e^2 \alpha_p}{3} \frac{a_0^2 n_*^2}{2} \{5n_*^2 + 1 - 3l(l+1)\} \quad (236)$$

и постоянной

$$C_{\delta} = C_{\delta, k} - C_{\delta, k'} \quad (237)$$

для сдвига частоты  $\Delta\omega$  перехода, связывающего два возмущенных уровня  $k$  и  $k'$ . В специальном случае возмущения атомами водорода в основном состоянии, которые являются основным источником уширения линий металлов в атмосферах старых звезд, имеем

$$\alpha_p = 0,663 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3 \quad (238)$$

и, используя формулу Ридберга, получаем

$$C_{\delta, k} = -1,01 \cdot 10^{-23} \left( \frac{13,5Z}{\chi - \chi_k} \right)^2, \quad (239)$$

где  $\chi$  и  $\chi_k$  (в эв) — энергии ионизации и возбуждения для излучающего атома. Сравнение экспериментальных и теоретических данных, проведенное в [97], показывает, что для щелочных металлов, серебра и ртути и взаимодействия с атомами благородных газов значения ширины линий, которые пропорциональны  $C_{\delta}^{2/5}$ , удовлетворительно согласуются с величинами, определяемыми по (236). Постоянная же взаимодействия с атомами более сложной структуры, например Fe [98] или Ti [99], превышает значение, предсказываемое формулой (236) в 5—10 раз. По-видимому, противоположное отклонение имеет место для линий ионов, уширенных аргоном [100]. Основным источником этих ошибок является, вероятно, предположение, что излучающий атом можно рассматривать как одноэлектронную систему.

Тот факт, что отношение ширины к сдвигу заметно отличается от значения 2,74, предсказываемого ударной теорией Линдхольма — Фоли, особенно когда возмущающим газом является гелий, обладающий очень низкой поляризуемостью и соответственно малыми величинами  $C_{\delta}$  и  $\rho_w$ , указывает на то, что, может быть, необходимо учитывать отклонения потенциала от вида  $r^{-6}$  на малых  $r$ . Хиндмарш [101] при попытке объяснить ширину и сдвиг резонансной линии кальция 4227 Å в атмосфере гелия рассмотрел уширение в рамках классической ударной теории, но с потенциалом Леннарда-Джонса, включающим член с отталкиванием вида  $r^{-12}$ ; он не смог, однако, определить  $C_{\delta}$  и  $C_{12}$  отдельно из результатов наблюдений.

В настоящее время ни статическая теория Маргенау [8], ни классические ударные теории не дают удовлетворительного описания уширения посторонними газами. Основными источниками такого неудовлетворительного положения являются сложный вид потенциала взаимодействия при малых  $r$ , образование в определенных случаях квазимолекул и трудности расчета постоянных взаимодействия.

§ 5. ФУНКЦИЯ ФОЙГТА  $H(\alpha, \nu)$ 

Функция Фойгта есть результат свертки гауссовского профиля (обусловленного, например, доплеровским уширением) и дисперсионного профиля [обусловленного радиационным и (или) ударным затуханием]. Независимыми переменными являются  $\alpha = \gamma/2\Delta\omega_D$  — отношение затухательной ширины к доплеровской ширине и  $\nu = \Delta\omega/\Delta\omega_D = \Delta\lambda/\Delta\lambda_D$  — расстояние от центра линии в единицах доплеровской ширины.

Эта функция обсуждалась наряду с другими Унзольдом [40] и Хунгером [102]. Имеется несколько определений этой функции:

$$H(\alpha, \nu) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2)}{\alpha^2 + (\nu - y)^2} dy = \quad (240)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\alpha x - \frac{1}{4}x^2\right) \cos \nu x dx = \quad (241)$$

$$= \operatorname{Re} \{ \exp [(\alpha + i\nu)^2] [1 - \phi(\alpha - i\nu)] \}, \quad (242)$$

где  $\phi$  — интеграл ошибок от комплексного аргумента

$$\phi(\alpha + i\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha + i\nu} \exp(-t^2) dt. \quad (243)$$

Условие нормировки имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha, \nu) d\nu = \sqrt{\pi}. \quad (244)$$

Из определения  $H(\alpha, \nu)$  следует, что в предельных случаях

$$\alpha = 0: H(\alpha, \nu) = \exp(-\nu^2), \quad (245)$$

$$\lim \alpha \rightarrow \infty: H(\alpha, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \nu^2} \quad (246)$$

функция  $H(\alpha, \nu)$  переходит в гауссовский или дисперсионный профиль.

Численные значения  $H(\alpha, \nu)$  можно определить с точностью около 5% из графиков для  $\lg H(\alpha, \nu)$  (фиг. 2.6), заимствованных из статьи Хунгера [102]. При более высоких требованиях к точности необходимо использовать таблицы или удобные разложения в ряды. Читатель может обратиться к таблицам следующих работ: Финн и Магглюстоун [103], где приводятся значения  $H(\alpha, \nu)$  для  $0 \leq \alpha \leq 1$ , полученные прямым интегрированием; Каммер [104] — значения в области  $0 \leq \alpha \leq 0,5$ , полученные с помощью разложения в ряд, найденного Харрисом.

Оценка функции  $H(\alpha, \nu)$  осложняется тем обстоятельством, что имеющиеся разложения в ряды сходятся удовлетворительно только в частях плоскости  $0 \leq \alpha \leq \infty$  и  $0 \leq \nu \leq \infty$ . Точность лучшая, чем 1%, получается, если в следующих разложениях использовать те члены, которые выписаны в явном виде:

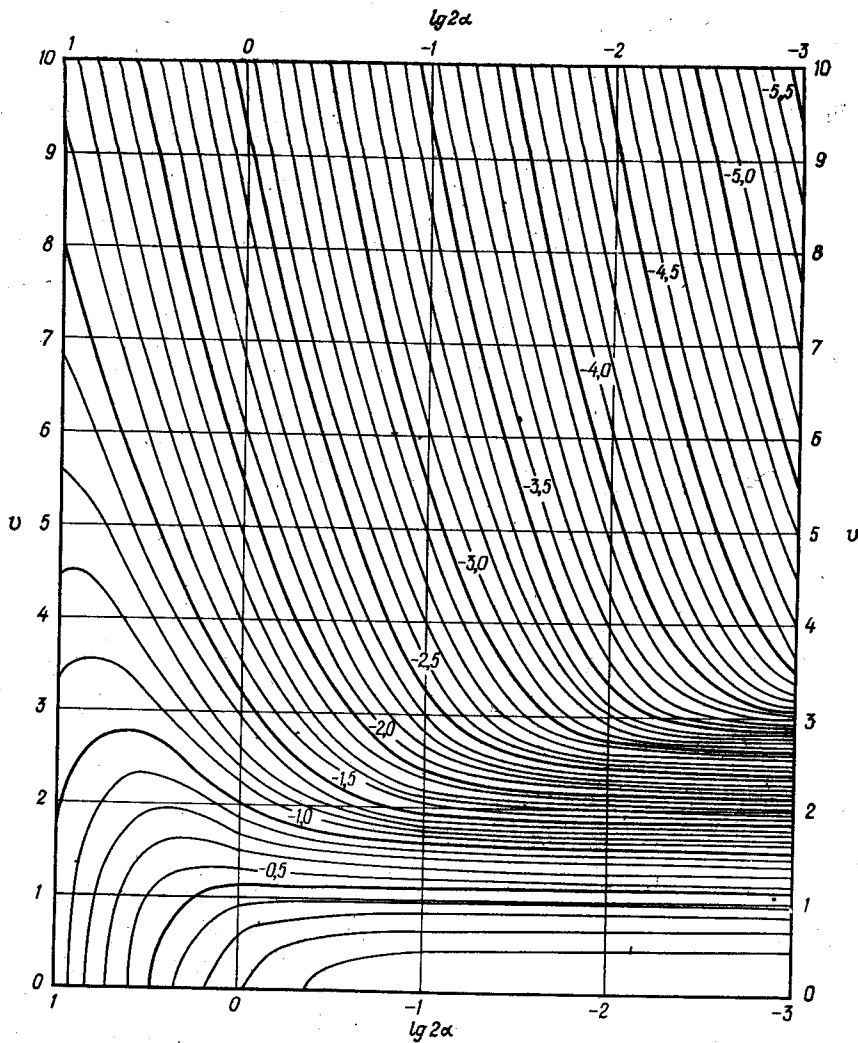
1) Для  $0 \leq \alpha \leq 0,2$  и  $\nu \geq 5$  быстро сходится асимптотическое разложение

$$H(\alpha, \nu) = \frac{\nu}{\sqrt{\pi} \nu^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2\nu^2} + \frac{15}{4\nu^4} + \dots \right\}. \quad (247)$$

2) Для  $\alpha \leq 0,2$  и  $\nu < 5$  можно использовать ряды, полученные Харрисом [105], который разлагал  $\exp(-\alpha x)$  в (241) и интегрировал по частям:

$$H(\alpha, \nu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(\nu) \alpha^i. \quad (248)$$





Ф и г. 2.6. Контурная диаграмма для функций Фойгта, построенная Хунгером [102].  
 Величины параметра  $\lg H(\alpha, v)$  отличаются на 0,1.

В этой области для получения точности в 1% достаточно использовать три члена. Коэффициенты имеют вид

$$H_0(v) = \exp(-v^2), \quad (249)$$

$$H_1(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - 2v \exp(-v^2) \int_0^v \exp(u^2) du \right), \quad (250)$$

$$H_2(v) = (1 - 2v^2) H_0. \quad (251)$$

Для  $H_1$  удобно использовать аппроксимацию Чебышева (см. [106]):

$$AH_1(v) = \sum_{i=1}^4 a_i v^i, \quad (252)$$

где

	$0 \leq v < 1,3$	$1,3 \leq v < 2,4$	$2,4 \leq v < 5$
A	1	1	$v^2 - \frac{3}{2}$
$a_0$	-1,12470	-4,48480	+0,55415
$a_1$	-0,15517	+9,39456	+0,27871
$a_2$	+3,28868	-6,61487	-0,18833
$a_3$	-2,34358	+1,98920	+0,04299
$a_4$	+0,42139	-0,22042	-0,00328

3) Для  $0,2 < \alpha$  и  $\alpha + v \leq 3,2$  полезно модифицированное разложение Харриса (см. [102])

$$H(\alpha, v) = \exp(\alpha^2) \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \exp(-t^2) dt \right\} \sum_{i=0}^{\infty} H'_i \alpha^i = \psi(\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} H'_i(v) \alpha^i. \quad (253)$$

Достаточно взять пять первых членов со следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} H'_0 &= H_0, \\ H'_1 &= H_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} H'_0, \\ H'_2 &= H_2 - H'_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} H'_1, \\ H'_3 &= \frac{2}{3\sqrt{\pi}} (1 - H_2) - \frac{3}{2} v^2 H'_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} H'_2, \\ H'_4 &= \frac{2}{3} v^4 H'_0 - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} H'_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} H'_3. \end{aligned} \quad (254)$$

Множитель  $\psi(\alpha)$  можно аппроксимировать следующим образом:

$$\psi = \sum_{i=1}^3 b_i \beta^i, \quad (255)$$

где  $\beta = 1/(1 + p\alpha)$  и

$$\begin{aligned} p &= 0,47047, & b_1 &= 0,34802242, \\ b_2 &= 0,0958798, & b_3 &= 0,7478556 \end{aligned}$$

(см. [16], формула 7.1.25).

4) Для  $\alpha > 1,4$  или ( $\alpha > 0,2$  и  $\alpha + v > 3,2$ ) лучшим приближением является модифицированный дисперсионный профиль

$$H(\alpha, v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{u} \left( 1 + \frac{3v^2 - \alpha^2}{u^2} + \frac{15v^4 - 30\alpha^2 v^2 + 3\alpha^4}{u^4} + \dots \right) \quad (256)$$

с  $u = \sqrt{2}(\alpha^2 + v^2)$ . В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  асимптотическая формула (256) переходит в (247).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lenz W., Zs. Phys., 25, 299 (1924).
2. Weisskopf V., Zs. Phys., 75, 287 (1932).
3. Lindholm E., Thesis, Uppsala (1942).
4. Foley H. M., Phys. Rev., 69, 616 (1946).
5. Stark J., Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome, Leipzig, 1914.
6. Debye P., Physik. Zs., 20, 160 (1919).
7. Holtsmark J., Ann. der Phys., 58, 577 (1919).
8. Margenau H., Phys. Rev., 48, 755 (1935).

9. Anderson P. W., Talman J. D., Conf. Broadening of Spectral Lines, University of Pittsburgh, 1955.
10. Wiener N., Acta Math., 55, 117 (1930).
11. Хинчин А., Math. Ann., 109, 604 (1934).
12. Dicke R. H., Phys. Rev., 89, 472 (1953).
- 13<sup>1)</sup> Собельман И. И., Fortschr. Physik, 5, 175 (1957).
14. Galatry L., Phys. Rev., 122, 1218 (1961).
15. Lindholm E., Arkiv Math., Astronom. och Fysik, 28B, nr 3 (1941).
16. Abramowitz M., Stegun I. A., Handbook of Mathematical Functions, Washington, 1964.
17. Jensen H., Zs. Phys., 80, 448 (1933).
18. Kolb A. C., Thesis, University of Michigan, 1957.
19. Holstein T., Phys. Rev., 79, 744 (1950).
20. Schmaljohann P., Kiel, 1930, не опубликовано.
21. Verwey S., Thesis, Amsterdam, 1936.
22. Chandrasekhar S., Rev. Mod. Phys., 15, 1 (1943). (См. перевод: С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, 1947.)
23. Baranger M., Mozer B., Phys. Rev., 115, 521 (1959).
24. Mozer B., Baranger M., Phys. Rev., 118, 626 (1960).
25. Ecker G., Zs. Phys., 148, 593 (1957); 149, 254 (1957).
26. Ecker G., Müller K. G., Zs. Phys., 153, 317 (1958).
27. Pfennig H., Zs. Naturforsch., 21a, 1648 (1966).
28. Mayer H., Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-647, 1947.
29. Broyles A. A., Phys. Rev., 100, 1181 (1955).
30. Baranger M., в книге Atomic and Molecular Processes, ed. D. R. Bates, New York, 1962. (См. перевод: Атомные и молекулярные процессы, под ред. Д. Бейтса, изд-во «Мир», 1964.)
31. Baranger M., Phys. Rev., 112, 855 (1958).
32. Вайнштейн Л. А., Собельман И. И., Оптика и спектроскопия, 6, 440 (1959).
33. Griem H. R., Baranger M., Kolb A. C., Oertel G. K., Phys. Rev., 125, 177 (1962).
34. Anderson P. W., Phys. Rev., 76, 647 (1949).
35. Epstein P. S., Phys. Rev., 28, 695 (1926).
36. Gordon W., Ann. Physik, Leipzig, 2, 1031 (1929).
37. Nguyen H., Vanerjea E., Drawin H. W., Herman L., Quant. Spectr. Radiative Transfer, 5, 835 (1965).
38. Van Dien E., Astrophys. Journ., 109, 452 (1949).
39. Traving G., Über die Theorie der Druckverbreiterung von Spectrallinien, Karlsruhe, 1960.
40. Unsöld A., Physik der Sternatmosphären, Berlin, 1955. (См. перевод 1-го изд.: А. Унзольд, Физика звездных атмосфер, ИЛ, 1949.)
41. Underhill A. B., Waddell J. H., NBS-Circ., 603 (1959).
42. Griem H. R., Plasma Spectroscopy, New York, 1964. (См. перевод: Г. Грим, Спектроскопия плазмы, М., 1969.)
43. Edmonds F. N., Jr., Schlüter H., Wells D. C., III, Mem. RAS (1967), в печати.
44. Pfennig H., Tréfftz E., Vidal C.-R., Journ. Quant. Spectr. Radiative Transfer, 6, 557 (1966).
45. Griem H. R., Zs. Phys., 137, 280 (1954).
46. Baranger M., Phys. Rev., 111, 481 (1958).
47. Baranger M., Phys. Rev., 111, 494 (1958).
48. Kolb A. C., Griem H. R., Phys. Rev., 111, 514 (1958).
49. Van Regemorter H., Ann. Rev. Astron. Astrophys., 3, 71 (1965).
50. Griem H. R., Kolb A. C., Shen K. Y., Phys. Rev., 116, 4 (1959).
51. Griem H. R., Astrophys. Journ., 136, 422 (1962).
52. Lewis M., Phys. Rev., 121, 501 (1961).
53. Griem H. R., Astrophys. Journ., 132, 883 (1960).
54. Griem H. R., Astrophys. Journ., 147, 1092 (1967).
55. Nguyen H., Drawin H.-W., Herman L., Report EUR-CEA-FC-310, 1965.
56. Griem H. R., Phys. Rev. Letters, 17, 509 (1966).
57. Vidal C.-R., Zs. Naturforsch., 19a, 947 (1964).
58. Boldt G., Cooper W. S., Report MPI-PA-6, 1964.
59. Schlüter H., Avila C., Astrophys. Journ., 144, 785 (1966).
60. Ferguson E., Schlüter H., Ann. der Phys., 22, 351 (1963).
61. Inglis D. R., Teller E., Astrophys. Journ., 90, 439 (1939).

<sup>1)</sup> Полужирным шрифтом выделены номера работ обзорного характера.— *Прим. ред.*

62. Vidal C.-R., Report MPI-PAE/PL-7, 1965.
63. Cayrel R., Traving G., Zs. Astrophys., 50, 239 (1960).
64. Herman L., Nguyen H., Drawin H.-W., Petropoulos B., Deutsch C., Report EUR-CEA-R 2913, 1965.
65. Nguyen H., Drawin H.-W., Herman L., Report EUR-CEA-FC-367, 1966.
66. Cayrel R., 2. thèse, Université de Paris, 1957.
67. Bréchet S., Van Regemorter H., Ann. Astrophys., 27, 432 (1964).
68. Bréchet S., Van Regemorter H., Ann. Astrophys., 27, 739 (1964).
69. Spitzer L., Physics of Fully Ionized Gases, New York, 1956. (См. перевод: Л. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа, 1-е изд., ИЛ, 1957, 2-е изд., изд-во «Мир», 1967.)
70. Griem H. R., Phys. Rev., 128, 515 (1962).
71. Bates D. R., Damgaard A., Phil. Trans., A242, 101 (1949).
72. Wiese W. L., в книге Plasma Diagnostic Techniques, New York, 1965. (См. перевод: Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, изд-во «Мир», 1967.)
73. Berg H. F., Ali A. W., Lincke R., Griem H. R., Phys. Rev., 125, 199 (1962).
74. Böttcher W., Roder O., Wobig K. H., Zs. Phys., 175, 480 (1963).
75. Roder O., Stampa A., Zs. Phys., 178, 348 (1964).
76. Wulf H., Zs. Phys., 150, 614 (1958).
77. Stone P. M., Agnew L., Phys. Rev., 127, 1157 (1962).
78. Wiese W. L., Murphy P. W., Phys. Rev., 131, 2108 (1963).
79. Stampa A., Zs. Astrophys., 58, 82 (1963).
80. Gericke W. E., Zs. Astrophys., 53, 68 (1961).
81. Day R. A., Griem H. R., Phys. Rev., 140A, 1129 (1965).
82. Pfennig H., Treffitz E., Zs. Phys., 190, 253 (1966).
83. Pfennig H., Treffitz E., Zs. Naturforsch., 21a, 697 (1966).
84. Pfennig H., Treffitz E., Report MPI/PAE/Astro/18, 1965.
85. Foster J. S., Proc. Roy. Soc., A117, 137 (1927).
86. Slater J. C., Kirkwood J. G., Phys. Rev., 37, 682 (1931).
87. Holtsmark J., Zs. Phys., 34, 722 (1925).
88. Breene R. G., Jr., The Shift and Shape of Spectral Lines, Oxford, 1961.
89. Margenau H., Watson W. W., Rev. Mod. Phys., 8, 22 (1936).
90. Фурсов В. С., Власов А. А., Physik. Zs. Sowjetunion (CCCP), 10, 378 (1936).
91. Ali A. W., Griem H. R., Phys. Rev., 140A, 1044 (1965).
92. Pittack U., Zs. Astrophys., 60, 190 (1964).
93. Северный А. Б., Известия Крымской астрофизической обсерватории, 16, 54 (1956).
94. Ch'en S., Takeo M., Rev. Mod. Phys., 29, 20 (1957). [См. перевод: УФН, 66, 391 (1958).]
95. Oldenberg O., Zs. Phys., 47, 184 (1928).
96. Preston W. M., Phys. Rev., 51, 298 (1937).
97. Unsöld A., Weidemann V., Vistas Astron., 1, 249 (1955).
98. Kusch H. J., Zs. Astrophys., 45, 1 (1958).
99. Meyer J., Zs. Astrophys., 60, 94 (1964).
100. Hey P., Zs. Astrophys., 52, 254 (1961).
101. Hindmarsh W. R., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., London, 119, 11 (1959).
102. Hunger K., Zs. Astrophys., 36, 36 (1956).
103. Finn G. D., Mugglestone D., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., London, 129, 221 (1964).
104. Hummer D. G., Mem. RAS, 70, 1 (1965).
105. Harris D. L., III, Astrophys. Journ., 108, 112 (1948).
106. Traving G., в книге Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik, Hrsg. Landolt-Börnstein, Gruppe 6, Bd. 1, 1965, S. 445—451.

### БИБЛИОГРАФИЯ

- Бöhm K. H., в книге Stars and Stellar System, ed. G. P. Kuiper, Vol. 6, Chicago, 1960.
- Breene R. G., Jr., Rev. Mod. Phys., 29, 94 (1957).
- Breene R. G., Jr., Encyclopedia of Physics, 27, 1 (1964).
- Lewis M., Margenau H., Phys. Rev., 109, 842 (1958).
- Lorentz H. A., Versl. Amsterdam Acad., 14, 518, 577 (1905).
- Margenau H., Rev. Mod. Phys., 11, 1 (1939).
- Margenau H., Lewis M., Rev. Mod. Phys., 31, 569 (1959).
- Pfennig H., Journ. Quant. Spectr. Radiative Transfer, 6, 549 (1966).
- Unsöld A., Vierteljahresschr. Astronom. Ges., 78, 213 (1943).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ

*В. Лохте-Хольтгревен\**

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Цель анализа состояния плазмы состоит в том, чтобы получить количественные сведения о химическом составе плазмы, числе свободных электронов, а также о таких параметрах, как температура, теплоемкость, вязкость, теплопроводность и проводимость. Эти величины могут быть постоянными во всем объеме плазмы (однородная плазма) или разными в различных частях плазмы (неоднородная плазма). Температура может быть различной для разных сортов частиц, имеющих в плазме (отсутствие равновесия), или понятие температуры может оказаться вообще бессмысленным.

Плазма может быть покоящейся или движущейся. В первом случае может иметь место обычная диффузия и термодиффузия, во втором же случае могут действовать дополнительно силы Лоренца. Следует рассматривать влияние электрических полей на заряженные частицы. Кроме того, картину могут усложнять колебания плазмы.

Для того чтобы достичь указанной выше цели, т. е. для получения детальной, насколько это возможно, информации, следует использовать все имеющиеся аналитические методы. Наблюдение, однако, не должно возмущать плазму, поскольку необходимы данные о невозмущенной плазме. Это требование заставляет отдать предпочтение спектроскопическим методам. Абсорбционная и эмиссионная спектроскопия позволяет получить количественные данные о сортах частиц, присутствующих в плазме, температурах возбуждения и ионизации (которые могут быть разными и которые могут меняться в пространстве и во времени). Спектроскопические измерения формы линий позволяют определить плотность электронов, температуру газа и температуру ионов. С другой стороны, измерения с помощью электрических зондов открывают путь к непосредственному измерению электронной и ионной температуры (см. гл. 11 и 12). Измерения с помощью магнитных зондов позволяют исследовать движение зарядов (см. гл. 10).

В случаях полного термодинамического равновесия или по крайней мере в случаях локального термодинамического равновесия (ЛТР) уже одни спектроскопические методы способны дать ответ на большинство (если не на все) интересующих нас вопросов. Поэтому прежде всего мы осветим методы количественной спектроскопии, а за ними — другие (оптические) методы исследований, которые не обсуждаются в остальных главах книги. Вначале мы рассмотрим однородную, оптически тонкую плазму, находящуюся в состоянии ЛТР. Позже эти ограничения будут сняты. Аналитические методы, разработанные для плазмы, не находящейся в ЛТР, можно также использовать и для ЛТР плазмы, но не наоборот. Прежде чем рассматривать указанный вопрос, следует обсудить некоторые свойства плазмы. Это обсуждение будет довольно коротким. Детали читатель сможет найти в гл. 1.

\* W. Lochte-Holtgreven, Kiel University.

## 1. ОБСУЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ СВОЙСТВ ПЛАЗМЫ

### а. Эффект оптической толщины излучающей плазмы

Излучение, испускаемое атомом, находящимся в плазме, может поглощаться другими атомами. Определим оптическую толщину  $\tau$  плазмы с помощью соотношения

$$\tau(\nu) = \int \kappa(\nu) dx, \quad (1)$$

где  $\kappa(\nu)$  — коэффициент поглощения на 1 см,  $x$  — координата вдоль луча зрения. Для однородной плазмы формула (1) сводится к следующей:

$$\tau(\nu) = \kappa(\nu) l, \quad (2)$$

где  $l$  — длина излучающего слоя.

В оптически тонкой плазме поглощением можно пренебречь. Принимается, что излучение отдельного атома выходит из плазмы и дает вклад в наблюдаемую интенсивность  $I_\nu$ , хотя по закону Кирхгофа в пределе при  $\kappa(\nu) = 0$  излучательная способность плазмы должна быть равна нулю.

При температурах выше  $10\,000^\circ\text{K}$  многие источники света совершенно прозрачны даже в центральных частях линий (за исключением, быть может, резонансных линий) благодаря тому, что интенсивность излучения черного тела, т. е. максимально возможная интенсивность, соответствующая этим температурам, в действительности очень высока.

Экспериментально прозрачность источника доказывается или путем изменения геометрического размера излучающего слоя, что часто можно сделать при помощи сферического зеркала, помещенного позади источника света, или путем измерения абсолютных интенсивностей. В первом случае на оптическую прозрачность слоя указывает изменение интенсивности света, точно соответствующее изменению геометрических размеров; во втором случае — величина абсолютной интенсивности, которая составляет только малую долю от соответствующей интенсивности черного тела. Если исследуются линии мультиплета, для которых известно теоретическое соотношение между интенсивностями, то близость относительных интенсивностей к теоретическим значениям указывает на оптическую прозрачность слоя, тогда как соотношения между интенсивностями, отвечающие кривой для излучения черного тела, указывают на то, что слой является оптически толстым. В другом методе используются ширины линий мультиплета. Если измерены ширины сильных и слабых линий в одном мультиплете, то в случае оптически тонкой плазмы они должны быть одинаковы (в шкале частот). Уменьшение пиковой интенсивности сильных линий указывает на конечную оптическую толщину плазмы, которая увеличивает наблюдаемую ширину линий. Этот метод обладает тем преимуществом по сравнению с предыдущим, что здесь не требуется знания относительных интенсивностей линий [1].

Эксперименты показали, что многие источники света, работающие при температурах выше  $10\,000^\circ\text{K}$  и атмосферном давлении, являются оптически тонкими. Можно показать, что другие источники света являются оптически толстыми в центральных частях некоторых линий и оптически тонкими в других спектральных областях.

### б. Полное термодинамическое равновесие

В термодинамическом равновесии энергия каждого отдельного сорта частиц распределяется среди всех имеющихся в газе частиц в соответствии с формулой Больцмана

$$\frac{n_n}{n_m} = \frac{g_n}{g_m} \frac{\exp(-E_n/kT)}{\exp(-E_m/kT)}. \quad (3)$$

Здесь  $E_m$  и  $E_n$  — дискретные или непрерывные энергетические уровни частиц одного сорта,  $n_n$  и  $n_m$  — плотности частиц в соответствующих состояниях,  $g_n$  и  $g_m$  — статистические веса уровней.

В случае ионизации это равновесное соотношение приводит к формуле Саха — Эггерта, которая выражает закон действующих масс для ионизации:

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} p_e = \frac{U_z}{U_{z-1}} 2 \frac{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} \exp\left(\frac{\chi_{z-1}}{kT}\right), \quad (4)$$

где  $n$  [ $\text{см}^{-3}$ ] — плотность частиц. Индекс  $z$  характеризует ступень ионизации:  $z = 1$  — нейтральный атом,  $z = 2$  — однократно ионизованный атом и т. д. Иными словами,  $z$  — это число положительных зарядов, «которые видит внешний электрон». Величина  $p_e$  — это давление, обусловленное свободными электронами,  $\chi_z$  — энергия ионизации из состояния  $z$ , и  $h$  — постоянная Планка,  $U_z, U_{z-1}$  — статистические суммы, которые будут рассмотрены ниже.

Из определения состояния равновесия вытекает, что число возбуждений атомов электронами равно числу столкновений второго рода, что акты ионизации происходят так же часто, как и акты рекомбинации между сталкивающимися частицами, и что испускаемое излучение равно поглощаемому излучению. Связь между коэффициентом испускания  $\epsilon_\nu$  (излучательной способностью) [ $\text{эрг}/\text{см}^3 \cdot \text{стер}$ ] и коэффициентом поглощения  $\kappa(\nu)$  [ $\text{см}^{-1}$ ] дается законом Кирхгофа

$$\frac{\epsilon_\nu}{\kappa\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}, \quad (5)$$

т. е. левая часть равна функции Планка  $B_\nu$ .

Частицы в плазме обмениваются энергией (при этом может происходить взаимное преобразование видов энергии) путем столкновений или через посредство излучения. При увеличении температуры роль излучения становится все более и более важной, и, наконец, оно начинает доминировать в процессе обмена энергией. Рассмотрим плотность излучения в случае полного термодинамического равновесия для плазмы с температурой  $10^6$  °К. Плотность излучения  $u$  дается формулой  $u = (4\sigma/c)T^4$ , где  $\sigma$  — постоянная Стефана для излучения, равная  $5,68 \cdot 10^{-5}$   $\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-4}$ . Для температуры  $T = 10^6$  °К плотность излучения равна  $7,57 \cdot 10^9$   $\text{эрг}/\text{см}^3$ . Давление этого излучения на поглощающую поверхность равно  $p = \frac{1}{3} u = 2,55 \cdot 10^9$   $\text{дин}/\text{см}^2$ , что составляет примерно 2500  $\text{атм}$ . Это давление не зависит от плотности частиц. При температуре  $10^6$  °К и плотности частиц  $10^{16}$   $\text{см}^{-3}$  давление частиц составляет немного менее 1  $\text{атм}$ . Следовательно, при температурах  $10^6$  °К термодинамические свойства равновесной плазмы полностью определяются излучением, а не столкновениями.

Для достижения такого равновесного состояния излучение должно быть реабсорбировано, т. е. пробег излучения до поглощения должен быть меньше размеров источника. Коэффициент поглощения для свободно-свободных переходов в водородоподобной плазме равен

$$\kappa(\nu)^{ff} = C \frac{Z^2 c^2}{2h} \frac{n_+ n_e}{(kT)^{1/2}},$$

где  $Z$  — заряд ядра, равный единице для водорода. При

$$T = 10^6 \text{ °К}, \quad n_+ = n_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}, \quad \nu = \frac{kT}{h},$$

$$C = \frac{32\pi^2 e^6}{3 \sqrt{3} c^3} (2\pi m_e)^{1/2} = 6,36 \cdot 10^{-47} \text{ ед. СГС}$$

получаем  $\kappa(\nu) = 10^{-11}$ , т. е. для размеров источника  $l$ , которые удовлетворяют неравенству  $\kappa(\nu)l \gg 1$ , имеем  $l \gg 10^{11}$   $\text{см}$ . Отсюда приходим к выводу, что в лабораторных источниках с температурой  $10^6$  °К или выше нельзя

получить равновесного «черного» излучения. С другой стороны, приведенный выше результат получен для излучения с частотой  $\nu = kT/h = 2,1 \times 10^{16} \text{ сек}^{-1}$ , которая соответствует длине волны  $\lambda = 140 \text{ \AA}$ . Если же мы исследуем излучение плазмы в инфракрасной области на длине волны  $\lambda = 1000 \text{ мк} = 0,1 \text{ см}$ , то длина поглощения становится гораздо меньше, чем  $1 \text{ см}$ , и можно ожидать, что интенсивность излучения будет определяться формулой Планка. Однако в присутствии вещества, всегда происходит перераспределение энергии между излучениями различных частот. Только если этот процесс пренебрежимо мал, можно ожидать появления «черного» излучения на частотах  $\nu \ll kT/h$ . Из этого рассмотрения следует, что достижение равновесной температуры есть проблема, существенно различная для плазм в области температур  $10^4$  и  $10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ .

Для каждой температуры, однако, наличие излучения неизбежно означает существование некоторых радиационных потерь из плазмы. Следовательно, состояние истинного термодинамического равновесия плазмы, включающей излучение, никогда не может быть реализовано.

#### в. Локальное термодинамическое равновесие (ЛТР)

Опыт показывает, что во многих случаях, когда столкновения играют преобладающую роль, результирующее стационарное состояние можно описать теми же законами, которые описывают плазму в истинном термодинамическом равновесии, исключая выходящее излучение. Говорят, что такая плазма находится в состоянии локального термодинамического равновесия (ЛТР).

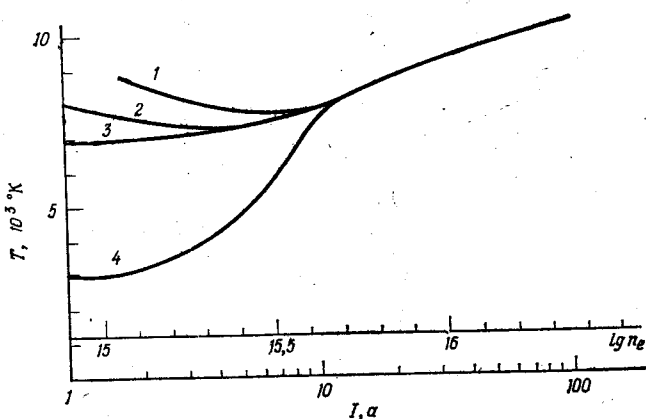
До тех пор пока столкновения являются доминирующими, состояние ЛТР можно получить даже в оптически тонкой плазме, т. е. в плазме, в которой поглощается только очень малая доля излучения. Экспериментально показано, что при уменьшении давления до нескольких миллиметров ртутного столба число столкновений настолько уменьшается, что уже не существует распределения Максвелла — Больцмана. При атмосферном же или более высоких давлениях и подходящем возбуждении наблюдается локальное стационарное больцмановское распределение по возбужденным состояниям в соответствии с уравнением (3), при условии что радиационные потери энергии не слишком велики. Эти результаты получены и подтверждены для плазм с высокой температурой, т. е. для плазм пламен и дуг при атмосферном и более высоких давлениях. Эксперименты по управлению тепловым поведением дуг были тщательно выполнены в различных местах. Мы отсылаем читателя к работам [3—6].

Используя стабилизированную стенками дугу при атмосферном давлении и токе в  $10 \text{ а}$  или больше, Рихтер показал, что в аргоне достигается состояние ЛТР, в то время как при токах ниже  $10 \text{ а}$  обнаруживаются отклонения от ЛТР. Для других газов величина предельного тока иная. При использовании свободно горящей дуги в гелии для получения ЛТР требуются токи в  $200 \text{ а}$ . На фиг. 3.1 и 3.2 представлены результаты экспериментов Колесникова в свободно горящей дуге при атмосферном давлении. На фиг. 3.1 приведены данные для смеси аргона с небольшим количеством водорода, а на фиг. 3.2 — для гелия с 5% неона и небольшим количеством водорода. Различия в температурах, измеренные при малых токах (т. е. при малых плотностях электронов), исчезают в аргоне для  $n_e > 8 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , а в гелии для  $n_e \gg 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

Значение плотности электронов, необходимой для достижения полного ЛТР, рассчитано Гримом [7] [формула (6.60)]. Эта электронная плотность дается соотношением

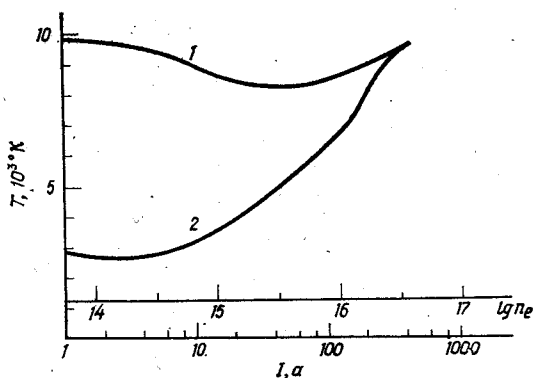
$$n_e \geq 9 \cdot 10^{17} \left( \frac{E_2}{\chi_H} \right)^3 \left( \frac{kT}{\chi_H} \right)^{1/2} \text{ см}^{-3}, \quad (6)$$





Ф и г. 3.1. Температуры, измеренные в аргонной плазме с небольшим количеством водорода.

Свободно горящая дуга, давление 1 атм. 1 —  $T_e$  из относительных измерений тормозного излучения; 2 —  $T_{\text{возб}}$  из уровней аргона относительно основного состояния); 3 —  $T_{\text{ион}}$  из формулы Саха; 4 —  $T_{\text{распр}}$  из заселенностей высоколежащих уровней, заселенных по Больцману; совпадает с  $T_{\text{газ}}$ . Для токов, больших 12 а, все температуры одинаковы (по Колесникову [4]).



Ф и г. 3.2. Температуры, измеренные в гелиевой плазме с 5% Ne и небольшим количеством водорода.

Свободно горящая дуга, давление 1 атм. 1 — температура  $T_e$ ; 2 — температура  $T_{\text{распр}}$ . Для токов, больших 200 а, все температуры одинаковы (по Колесникову [4]).

где  $E_2$  — энергия первого возбужденного, уровня (верхний резонансный уровень),  $\chi$  — энергия ионизации. Эта формула означает, что для достижения равновесного распределения энергии по уровням требуется по крайней мере  $n_e$  электронов в  $1 \text{ см}^3$ . Расчет для случая  $E_2$  означает, что ожидается полное ЛТР. Как отмечается ниже, меньшие плотности электронов приводят к частичному ЛТР.

Обращаясь опять к фиг. 3.1 и 3.2, мы видим, что эксперименты подтверждают, что для достижения теплового равновесия требуется определенная плотность электронов в соответствии с (6). Используя формулу (6), получаем, что в водороде при  $kT = 1 \text{ эв}$  для полного ЛТР необходима плотность  $n_e \approx 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , а для резонансной линии нейтрального гелия при  $kT = 4 \text{ эв}$  необходимо иметь  $n_e = 8 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . С другой стороны, для резонансных линий металлов с  $E_2$  около 4 эв при  $kT \approx 1,5 \text{ эв}$  необходимо  $n_e \approx 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

Для нестационарных разрядов при высоких давлениях (например, пинчи или ударные волны) установление ЛТР следует проверять в каждом случае отдельно, поскольку процессы релаксации могут задерживать наступление ожидаемого равновесия.

## г. Частичное ЛТР

Кроме понятия полного и локального термодинамического равновесия может оказаться полезным рассмотреть частичное ЛТР. Оно определяется так: формула (3) не выполняется для каждого уровня  $n$  и  $m$ , но справедлива для всех уровней с  $n \geq n^*$  ( $m > n$ ), включающих непрерывную область энергий, соответствующую свободным электронам. Смысл частичного ЛТР станет ясным, если рассмотреть радиационные переходы на нижние уровни. Эти переходы очень часты для низко лежащих уровней (например, резонансного уровня). Следовательно, эти уровни гораздо быстрее, чем более высокие уровни, опустошаются за счет радиационных переходов. Для полного термодинамического равновесия, включающего низко расположенные уровни, при доминирующей роли столкновений требуется много столкновений с электронами даже за короткое время жизни атомов в этих состояниях. Если эти уровни изъяты из рассмотрения, число столкновений в единицу времени, необходимое для получения равновесия между оставшимися сильно возбужденными состояниями, оказывается гораздо меньшим. Этот эффект резко выражен, поскольку сечения столкновений с электронами возрастают для более высоких атомных уровней. Для каждого атомного уровня, участвующего в равновесии, число излученных квантов должно быть мало по сравнению с числом возбуждений и тушений при столкновениях. Это особенно важно в том случае, когда плазма является оптически тонкой, поскольку излученная энергия теряется, и эта потеря энергии не должна нарушать энергетическое распределение. По Гриму [7] [формула (6.55)], плотность электронов, необходимая для частичного ЛТР, дается приближенной формулой

$$n_e \geq 7 \cdot 10^{18} \frac{z^6}{n^{17/2}} \left( \frac{kT}{\chi n} \right)^{1/2} \text{ см}^{-3},$$

где  $n$  — главное квантовое число низшего уровня, включенного в частичное ЛТР.

Если плазма является оптически толстой для излучения низко лежащих уровней, то соответствующая энергия не теряется и состояние полного равновесия достигается легче. Оценки влияния запертого резонансного излучения приведены в [7] [формула (6.63)].

## д: Плазмы, не находящиеся в ЛТР; модели состояний плазмы

Если неприменимы даже соотношения для частичного ЛТР, то под вопрос ставится представление о температуре. Энергия больше не распределяется по различным возбужденным состояниям атомов в соответствии с распределением Больцмана и не выполняется формула Саха. Каждый процесс столкновения больше не уравнивается обратным ему столкновительным процессом, как это было в модели ЛТР. Вместо ЛТР может реализоваться другой тип равновесия: ионизация при столкновении уравнивается излучательной рекомбинацией иона и электрона. Тогда отношение плотности ионов, находящихся на ступени ионизации  $z$ , к плотности ионов на ступени  $z+1$  (все ионы находятся в основном состоянии) вместо формулы Саха дается следующей формулой:

$$\frac{n_{z,1}}{n_{z+1,1}} = \frac{\alpha_{z+1,1}(T_e)}{\mathcal{S}_{z,1}(T_e)}, \quad (7)$$

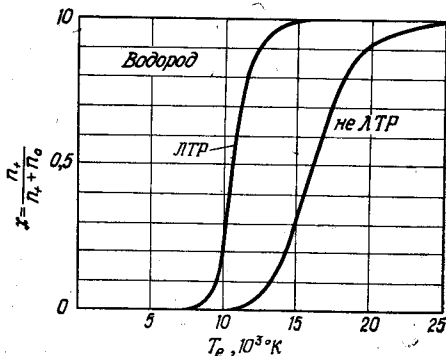
где  $\alpha$  — коэффициент излучательной рекомбинации,  $\mathcal{S}$  — коэффициент столкновительной ионизации.

Здесь все еще принимается, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям, и, следовательно, может быть введено понятие

о температуре электронов  $T_e$ . Атомы или ионы могут иметь другое распределение по скоростям, необязательно максвелловского типа. Вместо трехчастичной рекомбинации (процесс, в точности обратный процессу столкновительной ионизации) рассматривается только двухчастичная излучательная рекомбинация, которая имеет место в случае низких электронных плотностей. Если включить коэффициент  $Q$  для трехчастичной рекомбинации в основное состояние, то можно написать

$$\frac{n_{z,1}}{n_{z+1,1}} = \frac{n_e [\alpha_{z+1,1}(T_e) + n_e Q]}{n_e \mathcal{S}_{z,1}(T_e)} \quad (8)$$

Для  $\alpha \gg n_e Q$ , т. е. в том случае, когда нет трехчастичной рекомбинации, мы возвращаемся к формуле (7). В противоположном случае, при  $\alpha \ll n_e Q$ , получаем формулу Саха для основного состояния.



Ф и г. 3.3. Степень ионизации  $x = n_+ / (n_+ + n_0)$  в чисто водородной плазме, рассчитанная для ЛТР по уравнению Саха и для столкновительной корональной модели плазмы (по Дравину).

Важно отметить, что в формуле (7) степень ионизации больше не зависит от плотности электронов  $n_e$ . Поскольку такой тип равновесия осуществляется в солнечной короне, формула (7) называется уравнением коронального равновесия. В случае корональной модели плазма может быть оптически тонкой.

В балансе ионизации важную роль играют коэффициент ионизации электронным ударом и коэффициент излучательной рекомбинации. Баланс можно рассчитать только при условии, что рассчитаны или измерены эти два коэффициента. Кроме того, принимается, что относительно малое число столкновений с электронами приводит к возбуждению атомных или ионных уровней и эти столкновения уравновешиваются спонтанным излучением. Хорошее описание этой модели плазмы дал Мак-Уиртер [10], который дополнительно рассмотрел корональную модель, зависящую от времени, когда становится важным влияние метастабильных атомов, и столкновительно-излучательную модель.

В последней модели электроны сталкиваются не только с атомами в основном состоянии (корональная модель), но и с атомами, находящимися на произвольном возбужденном уровне, т. е. включаются переходы со всех возбужденных уровней и соответственно рекомбинация на возбужденные уровни. Применимость этих моделей очень сильно зависит от давления и температуры. Для плазм, описываемых корональной моделью, характерны малые давления и высокие температуры.

Используя столкновительно-излучательную модель плазмы, не находящейся в ЛТР, Дравин [11] рассчитал степень ионизации (имеется только одна ступень ионизации) для водорода в зависимости от электронной температуры  $T_e$ . На фиг. 3.3 сравниваются результаты этих расчетов с результатами, полученными из формулы Саха. Как видно, из формулы Саха при  $T_e = 12\,000$  °К следует, что степень ионизации равна примерно 0,9, тогда как согласно столкновительно-излучательной модели при той же температуре она составляет только 0,04.

## 2. ГРАДИЕНТЫ ДАВЛЕНИЯ И КОНЦЕНТРАЦИИ В ПЛАЗМЕ.

Если в плазме имеется разность давлений, она будет выравниваться (в отсутствие других сил) со скоростью звука  $c^2 = (\partial p / \partial \rho)$  адиабат. Тогда время выравнивания давления равно  $\tau_{\text{выр}} = \Delta x / c$ , где  $\Delta x$  — характерный размер плазмы. Для гелиевой плазмы с  $\Delta x = 0,5$  см,  $kT = 4$  эв и  $c = 1,26 \cdot 10^6$  см/сек получаем время  $\tau_{\text{выр}} = 0,4$  мксек, для плазмы  $\text{CH}_4$  с  $\Delta x = 0,5$  см и  $kT = 1,5$  эв снова получаем  $\tau_{\text{выр}} = 0,4$  мксек.

Эти результаты указывают на то, что в разрядах, время жизни которых больше  $\tau_{\text{выр}}$ , не следует ожидать появления разности давлений, тогда как в разрядах с более короткими временами жизни разность давлений может быть обнаружена.

Другая ситуация возникает, если сам механизм разряда приводит к образованию разности давлений. Например, когда плазма получается с помощью сильного тока, она сжимается магнитным полем этого тока. Силы Лоренца действуют на движущиеся частицы в радиальном направлении, что приводит к увеличению радиального давления (линейный пинч-эффект). Градиенты давления возникают и в тех случаях, когда плазма, нагреваемая током, удерживается во внешнем продольном магнитном поле, которое меняется со временем. Индукционные токи в плазме обуславливают появление вторичного магнитного поля, которое создает радиальные градиенты давлений (тэта-пинч). Недавно был рассмотрен третий источник разности давлений в плазме — эффект Нернста. Здесь к разности давлений приводит разность температур во внешнем магнитном поле [12—14].

Если происходит ионизация и в состав газа входит несколько сортов тяжелых частиц, то их равновесные концентрации зависят от температуры. В источниках плазмы, в которых существует градиент температуры, это приводит к обычной диффузии. Кроме того, в этих условиях может иметь место термодиффузия [16—18]. Маструп и Визе [15] впервые отметили, что состав смеси газов в плазме на оси электрической дуги иной, чем на периферии. Этот эффект может быть выражен довольно заметно. В [15] показано, что если в электрическую дугу ввести 50% гелия и 50% азота при атмосферном давлении, то на оси дуги измеренное отношение концентрации гелия и азота равно 2 : 1.

Оценим вначале характерное время *обычной диффузии*. Из уравнения диффузии  $\partial n / \partial t = D \partial^2 n / \partial x^2$ , используя анализ размерностей, получаем

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = D \frac{\Delta n}{(\Delta x)^2},$$

или

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{D}. \quad (9)$$

Здесь  $\Delta x$  — характерная длина установки, скажем диаметр разрядной трубки,  $\Delta t$  — характерное время диффузии на этой длине. Коэффициент диффузии дается формулой

$$D = \frac{3}{8} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{[kT (1/m_1 + 1/m_2)]^{1/2}}{Q_{12} (n_1 + n_2)}.$$

Здесь  $m_1$  и  $m_2$  — массы и  $n_1$  и  $n_2$  — плотности двух диффундирующих газовых компонент,  $Q_{12}$  — сечение столкновения. Коэффициент диффузии оказывается порядка  $10^3$  или  $10^5$  см<sup>2</sup>/сек. Взяв  $\Delta x \approx 1$  см, для характерного времени *обычной диффузии* получаем

$$10^{-3} \text{ сек} < \Delta t < 10^{-2} \text{ сек}.$$

Время, необходимое для установления стационарного состояния в случае *термодиффузии*, зависит от градиента температуры. Уравнение термодиф-

фузии имеет вид

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \alpha D_{12} \operatorname{div} \left( c_1 c_2 \frac{\operatorname{grad} T}{T} \right),$$

где  $\alpha D_{12}$  — постоянная термодиффузии,  $c_1, c_2$  — относительные концентрации двух компонент;  $c_1 = \rho_1/\rho$ ,  $c_2 = \rho_2/\rho$ . Из анализа размерностей снова получаем

$$\frac{c_1}{\Delta t} = \alpha D_{12} \frac{c_1 c_2}{(\Delta x)^2} \frac{\Delta T}{T} = \alpha D_{12} c_1 c_2 \frac{\Delta T}{\Delta x} \frac{1}{T \Delta x}$$

и

$$\Delta t \approx \frac{T \Delta x}{\alpha D_{12} c_2 (\Delta T / \Delta x)}$$

Здесь  $\Delta x$  — характерная длина,  $\Delta T$  — характерная разность температур. Температурные градиенты  $\Delta T / \Delta x$  порядка  $10^5$  град/см могут иметь место вблизи границ удерживаемой плазмы. В приведенном выше примере смеси 50% гелия и 50% азота начальные концентрации равны  $c_1 = n_1 m_1 / \rho = 4 n_1 / \rho$  и  $c_2 = n_2 m_2 / \rho = 14 n_2 / \rho$ , т. е.  $c_1 = 0,22$  и  $c_2 = 0,77$ . Коэффициент термодиффузии  $\alpha$  равен 0,3. Взяв  $D_{12} \approx 10^2 - 10^3$ , получаем  $\alpha D_{12} \approx 30 - 300$  см<sup>2</sup>/сек. При температуре  $T = 10\,000^\circ$  К получаем время установления равновесия путем термодиффузии, равное

$$0,45 \leq \Delta t \leq 4,5 \text{ мсек},$$

т. е. того же порядка величины, что и выше.

Из вышеизложенного видно, что в импульсных источниках плазмы с длительностью импульса меньше, чем 0,1 мсек, нет необходимости учитывать диффузию и термодиффузию.

В стационарных же плазменных источниках эти эффекты могут быть существенны.

### 3. ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ЛТР; ПЕРЕХОДНЫЕ ПЛАЗМЫ

Время, необходимое для установления термодинамического равновесия, существенно зависит от числа столкновений. Если рассматриваемый газ состоит из одних электронов, то движение электронов во внешнем электрическом поле можно представить как ускорение их центра масс без увеличения температуры. Только столкновения с тяжелыми частицами заставляют электроны хаотически изменять направления движения, т. е. приводят к увеличению температуры. Для изменения электронной температуры достаточно нескольких столкновений с тяжелыми частицами. Обмен импульсом при упругих столкновениях происходит гораздо легче между частицами одного сорта, чем между тяжелыми частицами и электронами. Из-за большой величины отношения масс ионов и электронов в каждом столкновении атомам передается только малая доля кинетической энергии электронов. Эта доля пропорциональна отношению  $2m_e/m$ . Таким образом, для выравнивания кинетических энергий электронов и атомов путем упругих столкновений потребуется по крайней мере  $m/2m_e \approx 10^3$  столкновений. Обмен же энергией и импульсом между атомами и между электронами происходит легко, так что кинетическое равновесие достигается через несколько столкновений, за очень короткое время. Резко отличная ситуация возникает в том случае, если столкновения больше не являются упругими. При неупругих столкновениях перенос энергии, приводящий к ионизации или возбуждению, осуществляется гораздо легче для электронов, чем для атомов.

#### а. Нагрев плазмы электронами

Когда плазма нагревается электронами, последние непрерывно получают избыточную энергию от электрического поля. Следовательно, полная передача избыточной энергии атомам и равновесие никогда не будут реализо-

ваны: температура электронов остается всегда выше, чем температура газа. Стационарное состояние достигается, если энергия, переданная электронами, благодаря наличию разности температур  $T_e - T_g$ , равна энергии, полученной ими от поля:

$$\frac{3}{2} k (T_e - T_g) \frac{2m_e}{m} n_e = eE^2 b_e \tau n_e, \quad (10)$$

где

$$b_e = \frac{v_e}{E} = \frac{\tau e}{m_e}. \quad (11)$$

Здесь  $\tau$  — время между столкновениями электрона с частицами массы  $m$ ,  $b_e$  — подвижность электронов,  $k$  — постоянная Больцмана. Для относительной разности температур, используя  $\tau = \lambda/v = \lambda \sqrt{m_e/3kT_e}$ , из (10) получаем

$$\frac{\Delta T}{T_e} = \frac{T_e - T_g}{T_e} = \frac{(\lambda e E)^2}{(3/2 k T_e)^2} \frac{m}{4m_e}. \quad (12)$$

Здесь  $\lambda e E$  — энергия, полученная электроном от электрического поля на длине среднего свободного пробега,  $3/2 k T_e$  — тепловая энергия электрона. При высоких давлениях (малые  $\lambda$ ) и небольших напряженностях поля (дуга) относительная разность температур становится небольшой. Так, например, для свободно горящей дуги в воздухе с  $T = 8000^\circ \text{K}$ ,  $m = 16$ ,  $m_e = 1/1840$ ,  $E = 20 \text{ в/см}$  и среднем свободном пробеге электронов  $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$  получаем  $\Delta T = 4^\circ \text{K}$ .

#### б. Время установления кинетического равновесия между электронами и тяжелыми частицами

По Гриму ([7], формулы (6.69а) и (6.69б)), время достижения ЛТР между электронами с массой  $m_e$  и атомами или ионами с массой  $m$  дается выражением

$$\tau_{\text{кин}} \approx \left[ 7,5 \cdot 10^{-7} \left( \frac{\chi_{\text{H}}}{kT} \right)^{3/2} n_e \right]^{-1} \frac{nm}{n_+ m_e}. \quad (13)$$

Здесь  $\chi_{\text{H}}$  — энергия ионизации водорода,  $n_+$  — плотность ионов,  $n$  — полная плотность частиц одного сорта,  $n_e$  — плотность электронов. Множитель  $3 \cdot 10^{-7}$ , приведенный Гримом в его книге, заменен после пересчета на  $7,5 \cdot 10^{-7}$  [20]. Для  $n_e \approx 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $kT = 1,5 \text{ эв}$ ,  $1 \leq m \leq 60$  и степени ионизации 20% получаем  $4,5 \cdot 10^{-9} < \tau_{\text{кин}} < 3 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$ ; при  $kT = 4 \text{ эв}$  соответствующие неравенства имеют вид  $2 \cdot 10^{-8} < \tau_{\text{кин}} < 10^{-6} \text{ сек}$ .

Для электронов, сталкивающихся с однократно заряженными ионами, аналогично получаем

$$\tau_{\text{кин}}^1 \approx \left[ 7,5 \cdot 10^{-7} \left( \frac{\chi_{\text{H}}}{kT} \right)^{3/2} n_e \right]^{-1} \frac{m}{m_e} \quad (14)$$

и для вышеприведенных данных имеем  $10^{-9} < \tau_{\text{кин}} < 6 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$  и соответственно  $5 \cdot 10^{-9} < \tau_{\text{кин}} < 2 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$ .

#### в. Время распределения энергии по дискретным уровням тяжелых частиц в соответствии с формулой Больцмана

Выше мы оценивали время, необходимое для установления кинетической температуры частиц. По истечении некоторого времени это приведет к распределению энергии по возбужденным состояниям атомов в соответствии с распределением Больцмана.

Время необходимое для термического заселения верхнего уровня  $E_2$  резонансной линии и тем самым для установления полного ЛТР вплоть до

основного состояния  $E_1$ , дается выражением ([7], формула (6.65))

$$\tau_1 \approx 1,4 \cdot 10^7 \frac{z^3}{f_{1,2} n_e} \frac{n_z}{n_z + n_{z-1}} \left( \frac{E_{z-1,2}}{z^2 \chi_H} \right) \left( \frac{kT}{z^2 \chi_H} \right)^{1/2} \exp \frac{E_{z-1,2}}{kT}. \quad (15)$$

Число  $z$  характеризует, как и прежде, степень ионизации:  $z = 1$  — нейтральный атом,  $z = 2$  — однократно заряженный ион и т. д.;  $f_{1,2}$  — сила осциллятора резонансной линии при поглощении. Следуя Визе [22], мы первым индексом обозначаем уровень, с которого происходит переход (поглощение — с нижнего уровня, испускание — с верхнего уровня). Для водорода при  $n_e = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $kT = 1 \text{ эв}$ , взяв  $f_{1,2} = 0,416$ , получаем  $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$ . С другой стороны, для плазмы из паров металлов с  $n_e = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $kT = 1,5 \text{ эв}$ , степенью ионизации 20% и  $f_{1,2} = 0,1$  получаем в типичных случаях  $\tau_1 = 10^{-9} \text{ сек}$ .

Время установления ЛТР решающим образом зависит от  $n_e$ . В том случае, когда  $n_e$  в начале процесса мало, время установления ЛТР возрастает на время, необходимое для получения достаточно высокой плотности электронов. Для искрового разряда при атмосферном давлении спустя 1 мксек после пробоя была измерена температура в 40 000 °К и экспериментально доказана сильная зависимость ЛТР от времени [23, 24]. Этот результат можно объяснить быстрым возрастанием числа свободных электронов в сильно конденсированных разрядах. Аналогичные результаты получаются при исследовании пинчей.

#### г. Нагрев плазмы при столкновениях с атомами

Нагрев при столкновениях с атомами представляет проблему, часто встречающуюся в ударных волнах. Эти столкновения гораздо менее эффективны для возбуждения и ионизации, чем столкновения с электронами. Следовательно, для установления температуры позади фронта ударной волны требуется заметное время релаксации. Оно зависит от вида сталкивающихся атомов. Времена релаксации оказываются порядка микросекунд; они больше всего для аргона и малы для криптона, нагреваемых ударной волной в водороде.

## § 2. ОДНОРОДНЫЕ ОПТИЧЕСКИ ТОНКИЕ ЛТР-ПЛАЗМЫ

В гл. 1 различные модели плазмы характеризовались с точки зрения испускаемого плазмой излучения. Здесь же, наоборот, из наблюдаемого излучения мы будем извлекать параметры плазмы. Эти параметры связаны с излучательными способностями отдельных слоев плазмы, дающих вклад в наблюдаемое излучение. Следовательно, при анализе плазмы всегда первым шагом будет определение излучательных способностей  $\epsilon_\nu$  [эрг/см<sup>3</sup>·сек·Дв·стер] вдоль луча зрения. Для оптически тонкого слоя они связаны с наблюдаемой интенсивностью  $I_\nu$  соотношением

$$I_\nu = \int_0^l \epsilon_\nu(x) dx. \quad (16)$$

Для однородной плазмы (16) сводится к виду

$$I_\nu = \epsilon_\nu l, \quad (17)$$

где  $l$  — длина излучающего плазменного столба.

Вначале проведем анализ состояния плазмы для этого простейшего случая. Случаи неоднородных плазм и плазм с исчезающим самопоглощением будут рассмотрены в следующих главах.

## 1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ САХА

## а. Плазма с одним сортом тяжелых частиц

Пусть термически возбужденная плазма состоит из атомов и ионов одного сорта; обозначим число всех неионизированных атомов в  $1 \text{ см}^3$  через  $n_0$ , а число ионов через  $n_+$  (двукратная ионизация не учитывается). Для случая однократной ионизации имеем

$$n_+ = n_e. \quad (18)$$

Кроме того, для степени ионизации имеем уравнение Саха — Эггерта [4], которое представим в сокращенной записи:

$$\frac{n_+ n_e}{n_0} = S(T), \quad (19)$$

где

$$S(T) \equiv 2 \frac{U_+}{U_0} \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi/kT}. \quad (20)$$

Здесь  $U_+$  и  $U_0$  — статистические суммы для иона и атома (см. ниже) и  $\chi$  — энергия ионизации.

Плотность  $n$  всех имеющихся в газе частиц равна сумме плотностей частиц отдельных сортов. В нашем случае

$$n_e + n_+ + n_0 = n = \frac{p}{kT}, \quad (21)$$

где  $p$  — полное давление. Таким образом, для термически возбужденного одноатомного газа с заданным давлением имеется три уравнения (18), (19) и (21), которые проистекают из условий равновесия [25].

Из (18) и (19) получаем

$$S(T) = \frac{n_e^2}{n_0} = \frac{n_+^2}{n - 2n_e}; \quad (22)$$

из (18) и (21) —

$$n_e = \frac{p}{2kT} - \frac{1}{2} n_0 \quad (23)$$

и из (19) и (21) —

$$n_0 = \frac{p}{kT} + 2S(T) - 2\sqrt{S(T)^2 + S(T)\frac{p}{kT}}. \quad (24)$$

Таким образом, плотность имеющихся атомов является функцией температуры и давления. Для заданных значений температуры и давления можно рассчитать величины  $n_0$  и  $n_e = n_+$  и для удобства представить результаты в виде графиков. Тогда при заданном давлении всего одно измерение какой-либо величины, зависящей только от  $n_e$ ,  $n_+$ ,  $n_0$  или  $T$ , позволит определить все эти величины отдельно и таким образом даст количественные сведения о составе плазмы.

Указанная выше ситуация часто реализуется в плазмах электрических дуг, которые горят в условиях, когда давление хорошо известно. Здесь, а также в случае стационарного или разрешенного во времени и пространстве состояния ЛТР давление можно определить спектроскопически из одного дополнительного измерения. В сильно же нестационарных разрядах рекомендуется измерять давление отдельно (см. стр. 156—159).

В качестве примера рассмотрим плазму, получаемую в пинче в гелии. Давление в пинче неизвестно. В гелий добавляется небольшое количество водорода, которого недостаточно для изменения параметров разряда, но вполне достаточно для того, чтобы появились некоторые бальмеровские линии.



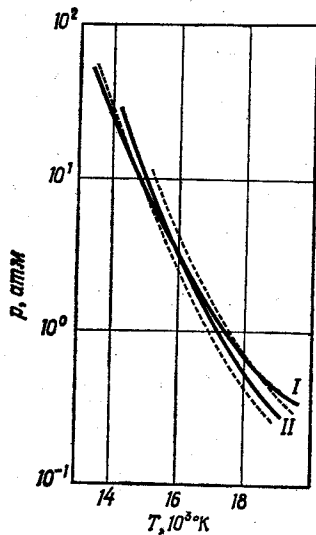
В этом случае формулу Саха для гелия можно записать так, как если бы водорода не было. Мы имеем следующие уравнения: формулу Саха, закон Дальтона и уравнение квазинейтральности:

$$\frac{n_{\text{He}^+} n_e}{n_{\text{He}}} = S(T), \quad (25)$$

$$n_{\text{He}^+} + n_{\text{He}} + n_e = n = \frac{p}{kT}, \quad (26)$$

$$n_{\text{He}^+} = n_e. \quad (27)$$

Для определения же параметров плазмы необходимо знать пять величин:  $n_{\text{He}}$ ,  $n_{\text{He}^+}$ ,  $n_e$ ,  $T$  и  $p$ . Подключение двух (или больше) уравнений, в кото-



Ф и г. 3.4. Гелиевая ЛТР-плазма с небольшим количеством водорода.

Определение температуры из полуширины линии  $H_{\beta}$ , дающей  $n_e$ , и из измерения абсолютной интенсивности линии  $\text{He } \lambda = 3889 \text{ \AA}$ . Кривая *I* —  $p$  из формул (22) и (21); кривая *II* —  $p$  из формул (24) и (3). Пунктирные кривые — ошибки измерения для кривой *I*. Из измерений нельзя получить нужную точку пересечения. Температуру еще можно определить с разумной точностью из области пересечения. Давление же остается неопределенным по крайней мере в пределах одного порядка.

рые входят искомые величины, позволит решить систему (25) — (27); недостающие уравнения получаются из эксперимента. Пусть такими двумя экспериментами являются следующие:

1) количественное измерение интенсивности линии гелия, скажем линии  $\lambda = 3889 \text{ \AA}$  (см. стр. 140), которое в случае однородной прозрачной плазмы дает прямо величину  $\varepsilon_{\nu} l$ ;

2) определение  $n_e$  из полуширины линии  $H_{\beta}$  (см. стр. 124).

Из (23) следует, что  $n_e$  является функцией  $p$  и  $T$ . Из (29) (см. ниже) следует, что интенсивность спектральной линии есть функция  $n_0$  и  $T$ , которая после подстановки в нее формулы (24) преобразуется вновь в функцию  $p$  и  $T$ .

Обе функции можно начертить на общем графике. Точка пересечения двух кривых определяет величины  $p$  и  $T$  в плазме. Во многих случаях этот метод приводит к правильным значениям  $p$  и  $T$ . Однако в некоторых случаях, как и в примере, приведенном выше, определение обоих параметров нельзя провести с достаточной точностью.

На фиг. 3.4 приведены кривые, о которых говорилось выше. Кривая *I* описывает зависимость  $p$  и  $T$  для измеренной абсолютной интенсивности линии  $\text{He } \lambda = 3889 \text{ \AA}$  (переход  $2^3S - 3^3P$ ). Кривая *II* получена из независимо определенной электронной плотности, найденной из полуширины линии  $H_{\beta}$ . Если на графике нанести линии, соответствующие точности измерений ( $n_e \pm 15\%$ , пунктирные линии), то станет ясно, что бессмысленно искать определенную точку пересечения кривых *I* и *II*, так как они имеют почти одинаковый наклон. Анализ показывает, что угол пересечения кривых

вых  $\alpha$  определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{1}{p} \left( \frac{\chi - E_m}{\chi E_m} kT + \frac{3}{2} \frac{(kT)^2}{\chi E_m} \right), \quad (28)$$

где  $\chi$  — энергия ионизации,  $E_m$  — энергия возбуждения верхнего уровня исследуемой линии.

Для линии гелия  $\lambda = 3889 \text{ \AA}$  разность энергий  $\chi - E_m$  мала. Ясно, что благоприятными являются случаи больших разностей между энергией ионизации  $\chi$  и энергией возбуждения  $E_m$  (большие  $\alpha$ ). Но в нашем случае  $\alpha$  остается порядка  $10^{-4}$ .

Определение параметров плазмы становится гораздо более точным, если температуру находить по относительным интенсивностям двух спектральных линий с большой разностью энергий их верхних уровней. Этот метод будет описан позже (см. стр. 142). Проведенное выше рассмотрение показывает, что в каждом случае, прежде чем проводить измерения, необходимо детально оценивать предполагаемую точность. Только после этого можно провести определение параметров плазмы успешно и с минимальными усилиями.

#### 6. Плазма с несколькими сортами тяжелых частиц

Теперь обратимся к случаю однородной плазмы, состоящей из нескольких сортов частиц, но будем учитывать только одну ступень ионизации. Допустим, что относительное содержание компонент плазмы известно, тогда снова достаточно одного измерения, чтобы определить количественный состав плазмы. Если относительное содержание компонент неизвестно, то необходимо провести столько измерений, сколько компонент присутствует в газе.

В качестве примера рассмотрим горячую плазму в дуге, свободно горячей между угольными электродами в воздухе при атмосферном давлении, при силе тока выше предельной, необходимой для установления теплового равновесия. При наблюдении через отверстия в электродах неоднородности разрядной плазмы в приэлектродных областях можно пренебречь. Здесь известно содержание кислорода по отношению к азоту, но неизвестно содержание углерода в плазме. Для трех компонент газа, N, O и C, имеются три формулы Саха, уравнение квазинейтральности, закон Дальтона и равенство, выражающее относительное содержание кислорода (к азоту), — всего шесть уравнений:

$$\frac{n_{+}n_e}{n_0} = S(T) \text{ для N, O и C,}$$

$$n_{N+} + n_{O+} + n_{C+} = n_e,$$

$$n_{N+} + n_N + n_{O+} + n_O + n_{C+} + n_C + n_e = n = \frac{p}{kT},$$

$$n_{N+} + n_N = 3,72 (n_{O+} + n_O).$$

В свободно горячей дуге давление  $p$  известно; оно очень близко к 1 атм. Представляют интерес следующие параметры плазмы:  $n_{N+}$ ,  $n_N$ ,  $n_O$ ,  $n_{O+}$ ,  $n_C$ ,  $n_{C+}$ ,  $n_e$ ,  $T$ . Снова необходимы два дополнительных уравнения, которые, как и раньше, можно получить, выполнив два измерения. Эти измерения могут быть различными по своей природе, но по крайней мере одно из них должно быть связано с тем элементом, содержание которого неизвестно в рассматриваемом примере — с углеродом. Если измерены абсолютные интенсивности линии углерода и, скажем, линии кислорода, то их можно представить в виде

$$\int I_\nu d\nu = l \int \epsilon_\nu d\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ki} \frac{g_k}{U} n l e^{-E_k/kT}. \quad (29)$$

Здесь  $I_\nu$  — абсолютная интенсивность, т. е. энергия, излучаемая на  $1 \text{ см}^2$ , в  $1 \text{ сек}$ , в  $1 \text{ стер}$  и в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ ;  $A_{ki}$  — эйнштейновская вероятность перехода,  $g_k$  и  $U$  — соответственно статистический вес уровня  $k$  и статистическая сумма,  $k$  — постоянная Больцмана,  $l$  — толщина излучающего слоя (здесь используется условие оптической прозрачности).

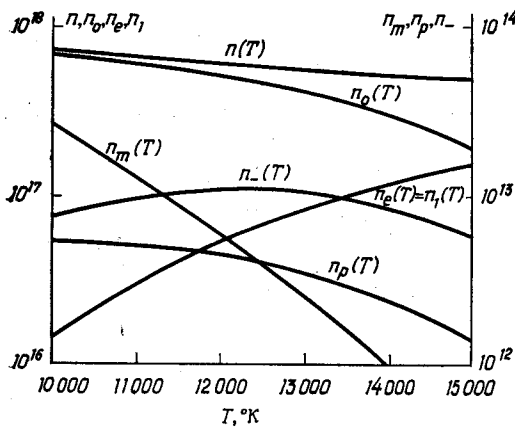
После того как измерена величина  $\int I_\nu d\nu$  для двух соответствующих линий, можно решить систему уравнений, что дает возможность получить количественные сведения о составе плазмы.

Таблица 3.1

Содержание ионов  $n_{\zeta-1} = n_{\zeta+1}$  (в %) при изоионной температуре (по Кремплю)

$\zeta$	C	N	Al	Pb
1	0,5	0,5	0,5	0,5
2	1,8	0,3	1,5	2,0
3	1,1			

Выше мы полагали, что в плазме имеются только однократно заряженные ионы. Откажемся теперь от этого ограничения и примем, что в некотором интервале температур присутствуют ионы с зарядом  $\zeta+1$ ,  $\zeta$  и  $\zeta-1$ .



Фиг. 3.5. Состав чисто кислородной ЛТР-плазмы при давлении  $1 \text{ атм}$  и при различных температурах.

Отношение плотностей ионов  $n_\zeta/n_{\zeta-1}$  и  $n_{\zeta+1}/n_\zeta$  можно найти из соответствующих формул Саха. Тогда существует температура  $T^*$ , называемая изоионной температурой [26], при которой  $n_{\zeta-1} = n_{\zeta+1}$ . Оказывается, что относительное содержание этих ионов  $n_{\zeta\pm 1}/(p/kT)$  при температуре  $T^*$  мало (табл. 3.1).

Таким образом, изоионная температура делит всю шкалу температур на две области: ниже  $T^*$  в плазме в основном присутствуют ионы с зарядом  $\zeta$  и  $\zeta-1$ ; выше  $T^*$  в ней доминируют ионы с зарядом  $\zeta$  и  $\zeta+1$ . Это означает, что при расчетах состава плазмы обычно достаточно рассматривать только

две ступени ионизации. Однако при очень точных расчетах или при температурах, превосходящих  $10^5 \text{ К}$ , может оказаться существенным учет и большего числа ступеней ионизации. В этих случаях многозарядные ионы рассматриваются как новые частицы, относительное содержание которых определяется по формулам Саха.

В качестве примера на фиг. 3.5 представлены данные о количественном составе кислородной плазмы при температурах от  $10\,000^\circ$  до  $15\,000^\circ \text{ К}$  и давлении в  $1 \text{ атм}$  (условия в дуге) [27]. На фиг. 3.5 представлены:

- $n_m$  — плотность молекул  $\text{O}_2$ ,
- $n_p$  — плотность молекулярных ионов  $\text{O}_2^+$ ,
- $n_-$  — плотность  $\text{O}^-$ ,
- $n_0$  — плотность нейтральных атомов  $\text{O}$ ,

$n_z$  — плотность положительных ионов кислорода с зарядом  $z$ ,

$n_e$  — плотность свободных электронов,

$n$  — плотная плотность частиц.

Из приведенного примера видно, что даже в плазме, состоящей только из одного химического компонента (кислорода), присутствует 7 различных сортов частиц. Молекулы рассматриваются как отдельные частицы; их степень диссоциации рассчитывается из уравнения диссоционного равновесия:

$$\frac{n_0(T) n_O(T)}{n_m(T)} = \frac{U_0(T)^2}{U_m(T)} e^{-D/kT}. \quad (30)$$

Здесь  $D$  — энергия диссоциации молекул  $O_2$ , равная  $98184,4 \text{ см}^{-1}$ ,  $U_m$  — статистическая сумма молекулы кислорода. Ее можно рассчитать, зная два множителя: трансляционную часть  $(2\pi mkT/h^2)^{3/2}$  и внутреннюю часть,

$U_{\text{внутр}} = \sum_{m=1}^i g_m \exp(-E_m/kT)$ , где  $g_m$  — статистические веса состояний с энергией  $E_m$ . Отрицательные ионы также рассматриваются как отдельные частицы, ионизация которых описывается формулой Саха:

$$\frac{n_0(T) n_e(T)}{n_-(T)} = \frac{U_0(T) g_e}{U_-(T)} e^{-\chi/kT}. \quad (31)$$

Указанный метод определения количественного состава плазмы совершенно правилен, но для проведения расчета требуется выполнение большого объема вычислительной работы даже в том случае, если в плазме имеется только один химический сорт частиц.

Формулы Саха для различных ступеней ионизации (и различных сортов частиц) связаны между собой общей величиной  $n_e$  и общей температурой. Статистические суммы оказываются конечными, если использовать снижение потенциала ионизации в плазме, который опять зависит от величины  $n_e$ . Поэтому нельзя дать аналитического решения уравнений (25)–(27). Вместо этого проводится итерационное численное решение, которое в случае нескольких компонентов возможно только на ЭВМ. Для удобства Дравин рассчитал и составил таблицы для формул Саха  $S^*(T)$  [28]:

$$S(T) = \frac{2U_z}{U_{z-1}} S_{z-1}^*(T), \quad (32)$$

$$S_{z-1}^*(T) = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_{z-1} - \Delta\chi_{z-1}}{kT}\right) =$$

$$= 2,4125 \cdot 10^{15} T^{3/2} \exp\frac{\Delta\chi_{z-1} - \chi_{z-1}}{kT}.$$

В [28] приведены также таблицы статистических сумм  $U(T)$ , согласно (33), для ряда элементов.

#### в. Расчет статистической суммы

В приведенные выше уравнения входит статистическая сумма  $U(T)$  для различных ступеней ионизации. Эта сумма равна

$$U_{z-1}(T) = \sum_{i=1}^{i_{\text{макс}}} g_{z-1} \exp\left(-\frac{E_{z-1, i}}{kT}\right), \quad (33)$$

т. е. сумме взвешенных больцмановских множителей для всех дискретных энергетических уровней. Значения энергий отдельных уровней и их статистические веса можно взять из таблиц [29]. Высоколежащие водородоподобные термы можно рассматривать приближенным образом. Поскольку число уровней вблизи границ серий бесконечно, сумма бесконечна, если она берется до  $i = \infty$ . Однако, как следует из формулы (33), сумма оказывается

конечной, если она берется до  $i = i_{\text{макс}}$ . Предельное значение  $i_{\text{макс}}$  получается из снижения энергии ионизации в плазме (см. гл. 1, § 3, п. 8). Мы обсудим это в п. «г». Недавно был разработан удобный метод расчета статистической суммы [30]. Метод заключается в расщеплении суммы на водородоподобную часть, для высоколежащих уровней, которая может быть рассчитана раз и навсегда, и сумму по нижним термам, которые заменяются несколькими (не больше чем пятью) приближенными термами. Для ряда элементов эти «заменяющие» термы вместе с их статистическими весами приведены в [30].

#### г. Снижение потенциала ионизации в плазме

Хотя плазма в целом является квазинейтральной средой, т. е. числа зарядов обоих знаков в ней равны, квазинейтральность не сохраняется в очень малых объемах, так как заряды одного знака имеют тенденцию окружать себя зарядами противоположного знака. Этой тенденции частично противодействует тепловое движение. В результате плазма оказывается в какой-то мере поляризованной, как это имеет место в электролитах, исследованных Дебаем. В поляризованной среде энергия диссоциации частиц несколько уменьшается, потому что обе вновь образующиеся частицы до некоторой степени притягиваются окружающими зарядами. Сфера, внутри которой заметна поляризация, называется дебаевской сферой; ее радиус равен

$$\rho_D = \left[ \frac{\varepsilon kT}{4\pi e^2 (n_e + \sum_{\zeta} n_{\zeta} \zeta^2)} \right]^{1/2}, \quad (34)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость плазмы,  $\zeta = z - 1$  — заряд иона. В приведенном выше примере с кислородной плазмой радиус дебаевской сферы равен

$$\rho_{DO} = \left[ \frac{\varepsilon kT}{4\pi e^2 (n_e + n_- + n_p + \sum_{\zeta=1}^3 n_{\zeta} \zeta^2)} \right]^{1/2}, \quad (35)$$

т. е. молекулярные ионы и отрицательный атомарный ион входят в расчетную формулу таким же образом, как и положительные атомарные ионы. Тогда снижение потенциала ионизации  $\Delta\chi_{\zeta}$  дается формулой [31]

$$\Delta\chi_{\zeta} = 6,24 \cdot 10^{11} \frac{(\zeta + 1) e}{\rho_D} e\phi \quad (36)$$

( $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  ед. СГС) или в более общей форме

$$\Delta\chi_{\zeta} = \alpha \frac{e}{r_0} + \alpha' \frac{e^2}{\rho_D}. \quad (37)$$

Здесь  $r_0$  — расстояние до ближайшего атома, равное  $(3/4\pi n)^{1/3}$ . При высоких или низких плотностях необходимо в основном учитывать  $r_0$  или  $\rho_D$  соответственно. Существует некоторая неопределенность в отношении параметров  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Оба они оказываются порядка единицы. Если, однако, следовать приближениям, использованным в [32—34], то получаются небольшие различия. Для  $T = 16 \cdot 10^3$  °К и  $n_e = 2 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup> Ольсен [35] получил

Автор	$\alpha$	$\alpha'$	$\Delta\chi, e\phi$
Дебай — Хюккель	0	1	0,09
Унзольд	3,0	0	0,44
Эккер — Вайцель	2,9	0,8	0,52
Бруннер	5,2	0,8	0,85

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ

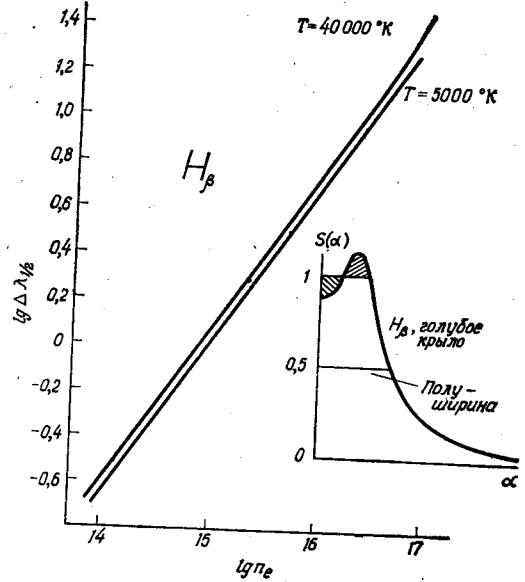
### а. Определение плотности электронов из ширины линии в случае линейного штарк-эффекта

Уширение излучаемых плазмой спектральных линий вследствие эффектов давления описывается общим законом  $\Delta\omega = C/r^n$  с различными значениями  $n$  для разных типов взаимодействия. Случаи  $n = 2$  и  $n = 4$ , т. е. уширение из-за линейного и квадратичного штарк-эффекта, обуславливаются зарядами соседних ионов или электронов, действующих на атомы. Зная постоянную  $C$ , уширение можно получить из статистических расчетов распределения возмущающих частиц в зависимости от расстояния  $r$  или, наоборот, плотность заряженных частиц в плазме можно определить из измерений ширины линий. Теория уширения линий описана в гл. 2. Так как эффекты уширения оказываются наиболее сильными для атомов с линейным штарк-эффектом, то наиболее уширенными являются линии водорода и водородоподобные линии других элементов. Профили водородных линий, в особенности линии  $H_\beta$ , рассчитывались рядом авторов для различных электронных давлений и температур. В различных теориях профиль линии описывается с помощью функции  $S(\alpha)$ , несколько различающийся у разных авторов. Профиль линии нормируется условно

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) d\alpha = 1, \text{ где величина}$$

$= 2,61 \cdot \Delta\lambda n_e^{2/3}$  и  $\Delta\lambda$  — расстояние от центра невозмущенной линии. Таким образом, из экспериментально найденного профиля можно получить  $n_e$  с помощью указанного выше соотношения определить плотность электронов. Грим, Колб и Шен [36] рассчитали функцию  $S(\alpha)$  для линии  $H_\beta$  при различных температурах и плотностях электронов. Они приняли во внимание уширение линии медленно меняющимися электрическими полями ионов и, кроме того, учли, согласно ударной теории, уширение, обусловленное быстро движущимися электронами. Так как теория разработана с высокой степенью точности и измерение профилей бальмеровских линий легко провести, то этот метод определения  $n_e$  очень удобен. Впрочем, как и странно, существуют небольшие, но заметные различия, полученные при определении параметров плазмы по бальмеровским линиям и по другим линиям в той же самой плазме. Эти различия еще не объяснены. Кроме того, вопрос о точной форме водородных линий обсуждается даже в наше время [37—40], см. также стр. 89 настоящей книги).

Экспериментальный метод определения  $n_e$  из профиля линии  $H_\beta$  при известной температуре состоит в том, что чертится семейство теоретических профилей для различных плотностей электронов, причем все они нормируются на площадь под профилем. Затем экспериментальный профиль нормируется



Ф и г. 3.6. Определение  $n_e$  по полуширине линии  $H_\beta$ . Высота линии  $H_\beta$  определена, как указано, с помощью интерполяции. Используется только голубое крыло [40].

ся в той же шкале и сравнивается с семейством теоретических кривых. Плотность электронов извлекается из теоретического профиля, который лучше всего соответствует экспериментальному.

Гораздо проще, хотя и не так точно, плотность электронов  $n_e$  можно получить из (половины) полуширины линии  $H_\beta$ , если использовать фиг. 3.6. Из нее видно, что температура мало влияет на полуширину линии.

Во многих плазмах водород содержится в качестве компонента; если же водорода нет, следует обратить внимание на то, меняются ли свойства плазмы при добавлении водорода. Даже небольшое количество водорода может заметно изменить коэффициент теплопроводности, а с ней и температуру. Следовательно, значение, полученное после добавления водорода, не обязательно будет совпадать с тем значением, которое было получено перед добавлением водорода.

#### б. Определение плотности электронов из ширины и сдвига линии в случае квадратичного штарк-эффекта

К сожалению, нельзя дать общей формулы для определения  $n_e$  из ширины или сдвига линии в случае квадратичного штарк-эффекта. Следовательно, каждую линию приходится рассматривать отдельно. Для ряда спектральных линий различных элементов Грим [7] рассчитал электронную ударную (полуширину) полуширину линии  $w$ , отношение сдвига к ширине  $d/w$  и дополнительно параметр ионного уширения  $\alpha$ <sup>1)</sup>. Значения, рассчитанные Гримом (табл. 4—6 в [7]), относятся к плотности электронов, равной  $10^{16}$  см<sup>-3</sup>. Для произвольных плотностей и температур полуширины и сдвига можно получить из табличных данных с помощью соотношений [41]:

$$\Delta\lambda_{1/2} \approx [1 + 1,75 \cdot 10^{-4} n_e^{1/4} \alpha (1 - 0,068 n_e^{1/6} T^{-1/2})] \cdot 10^{-16} w n_e \quad (38)$$

и

$$\Delta\lambda_{\text{сдвиг}} \approx \left[ \frac{d}{w} + 2,0 \cdot 10^{-4} n_e^{1/4} \alpha (1 - 0,068 n_e^{1/6} T^{-1/2}) \right] \cdot 10^{-16} w n_e. \quad (39)$$

Эти формулы справедливы при  $\alpha < 0,5 \cdot 10^4 n_e^{-1/4}$ . Дальнейшие детали читатель может найти в [7]. Если измерить полуширины (и сдвиги), то плотность электронов можно извлечь даже в том случае, когда точность измерения температуры мала. Эксперименты, в которых использовалась плазма с известной плотностью электронов и известной температурой, указывают на то, что существует согласие с расчетом Грима в пределах 25—30% [42, 43]. Желательно, однако, исследовать ряд различных линий, излучаемых одним и тем же элементом плазмы для того, чтобы исключить влияние различной точности расчетов при определении плотности по различным линиям.

#### в. Определение плотности электронов из ширины линии в случае ионных линий

Ионы в плазме подвергаются действию окружающих частиц дольше, чем нейтралы, поэтому здесь неприменимо приближение «прямолинейного пути». Заряженные возмущающие частицы движутся по гиперболическим траекториям. При включении в теорию увеличенного времени взаимодействия ионные линии становятся значительно шире, чем в приближении прямолинейных траекторий. Ряд ширин ионных линий рассчитан в [44, 45]. Измерения показывают, что эти расчеты согласуются с экспериментом в пределах примерно 50% точности; наоборот, из измеренных ширин ионных линий, используя данные [44, 45] (см. также гл. 2, стр. 96), можно определить плотность электронов.

<sup>1)</sup> Этот параметр  $\alpha$  не следует путать с переменной  $\alpha$  в профилях водородных линий, которая использовалась в предыдущем пункте.

### г. Определение плотности электронов из измерений абсолютной интенсивности непрерывного излучения

Наблюдаемое экспериментально непрерывное излучение почти всегда обусловлено несколькими элементарными процессами. Имеются свободно-связанные и свободно-свободные электронные переходы и соответствующие континуумы. Кроме того, могут налагаться континуумы, принадлежащие различным ионным состояниям частиц того же сорта. Наконец, вклад в непрерывное излучение могут вносить частицы различных сортов, имеющиеся в плазме.

Излучение при *свободно-связанных* переходах всегда примыкает к границам серий. Излучательная способность  $1 \text{ см}^3$  водородной плазмы, отнесенная к телесному углу в  $1 \text{ стер}$ , в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$  при переходе свободного электрона на уровень  $E_n$  была рассчитана Крамерсом и Унзольдом (см. гл. 1, § 5, п. 3). В реальных плазмах происходит наложение ряда различных континуумов, связанных с переходами на все дискретные энергетические уровни. Это наложение для достаточно близко лежащих дискретных состояний можно заменить интегрированием. В случае водорода интегрирование достаточно корректно для всех уровней с главным квантовым числом  $n > 4$ , т. е. в инфракрасной спектральной области  $\lambda > 13\,000 \text{ \AA}$ . В этой спектральной области непрерывное излучение при свободно-связанных переходах описывается следующим выражением:

$$H_{\nu}^{fb} = \text{const} \frac{n_+ n_e}{T^{1/2}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right], \quad (40)$$

где

$$\text{const} = \frac{16\pi e^6}{3c^3 (6\pi m^3 k)^{1/2}}.$$

Если от водорода перейти к другим элементам, то следует заметить, что в этом случае излучающий электрон частично проникает в облако зарядов, окружающих ядро. Этот эффект описывается множителем  $\xi(\nu, T)$ , в который дополнительно включены все другие отклонения от водородоподобности. Кроме того, вводится множитель  $\gamma$ , который учитывает разницу в статистических весах основного состояния родительского иона и водорода. Итак, получаем

$$e_{\nu}^{fb} = H_{\nu}^{fb} Z^2 \gamma \xi(\nu, T), \quad (41)$$

где  $Z$  — заряд ядра.

*Свободно-свободные* переходы в случае водородной плазмы приводят к излучательной способности, описываемой следующей формулой:

$$H_{\nu}^{ff} = \text{const} Z^2 \frac{n_+ n_e}{T^{1/2}} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (42)$$

Свободно-свободные переходы доминируют в инфракрасной области. При  $n_e$  от  $10^{13}$  до  $10^{15} \text{ см}^{-3}$  собственно тормозное излучение лучше всего можно измерять в микроволновой области на частотах, меньших плазменной частоты. При плотности электронов  $n_e$ , большей  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ , измерения можно распространить на видимую часть спектра. Для большей точности формулу (42) выведенную из классических представлений, следует модифицировать даже для водорода путем введения квантовомеханического фактора Гаунта  $G(\nu, T)$ .

Для других элементов формулу (42) следует умножать на соответственные другие факторы Гаунта, но без множителя  $\gamma$ , потому что свободные электроны не прилипают к ионам. Если рассматривать *свободно-свободные* и *свободно-связанные* переходы вместе, то непрерывное излучение плазмы



описывается формулой

$$\varepsilon_{\nu} = \text{const } Z^2 \frac{n_+ n_e}{T^{1/2}} \left\{ \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \frac{\gamma}{U_Z} \xi(\nu, T) + G \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right\}. \quad (43)$$

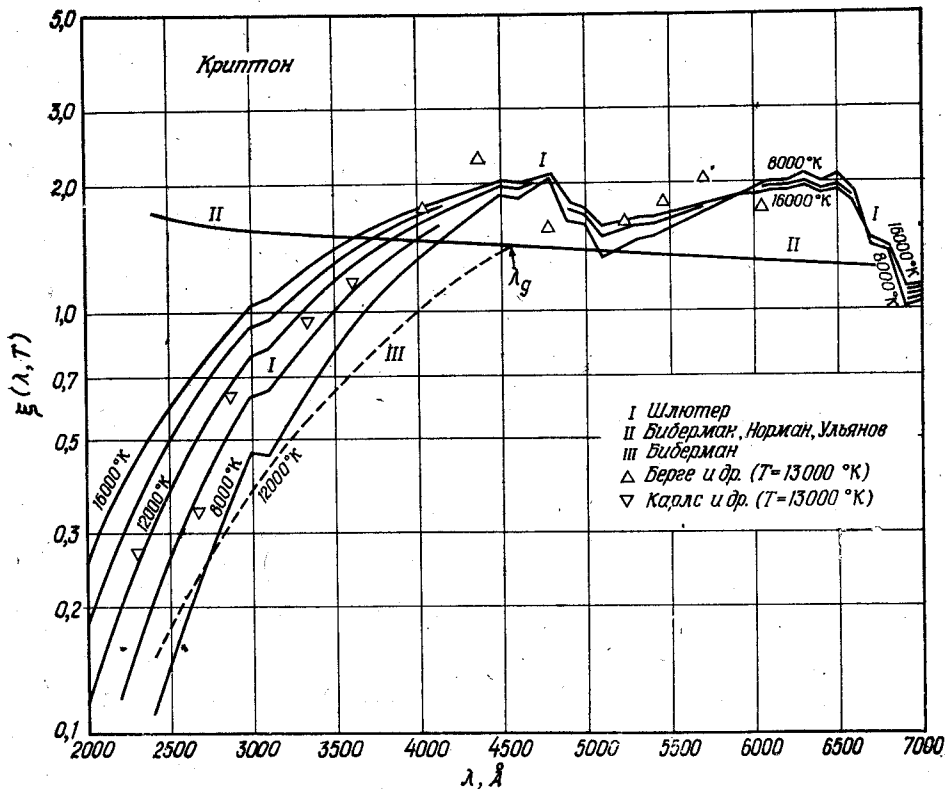
Формула справедлива во всем спектральном интервале, исключая область вблизи плазменной частоты

$$\nu_{\text{пл}}^2 = \frac{e^2 n_e}{4\pi^2 m}. \quad (44)$$

Факторы Гаунта, входящие в (41), табулированы в [46, 47]. С другой стороны, фактор  $\xi$  можно рассчитать, используя метод квантового дефекта [48]. Для волновой функции свободного электрона Ситон, следуя Бейтсу и Дамгору [49], использует кулоновское приближение. Связанные состояния рассчитываются как водородоподобные с эффективными квантовыми числами, определенными из эмпирически известных энергетических уровней.

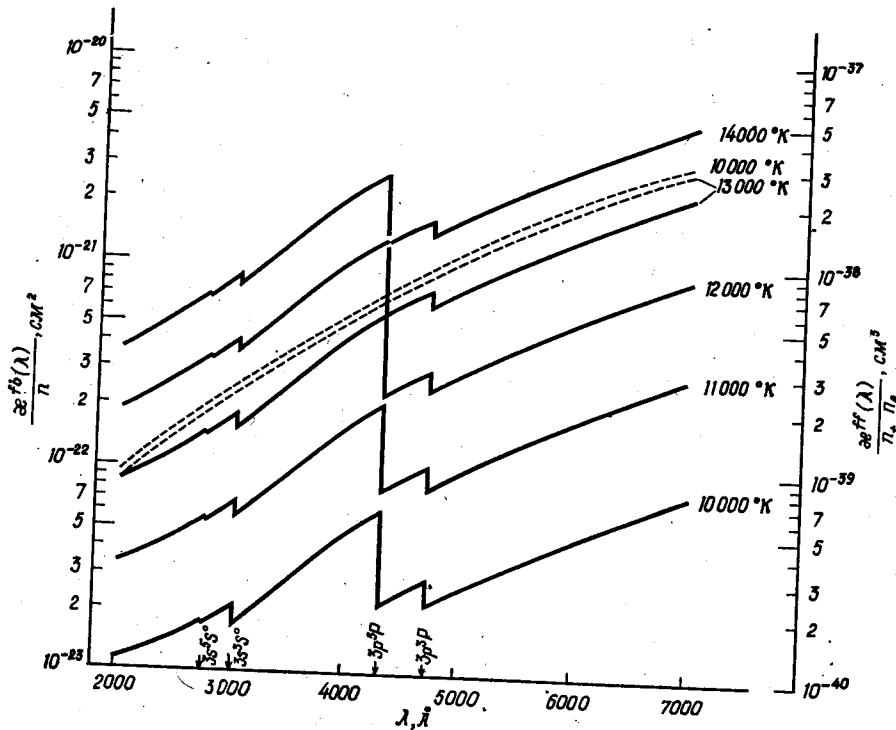
Для благородных газов факторы  $\xi$  были точно рассчитаны Шлютером [50]. На фиг. 3.7 представлены его результаты для криптона. Наряду с этим Шлютер рассчитал факторы  $\xi$  для Cl, OI, NI и ClI, OII и NII [51].

В настоящее время проводится расчет факторов  $\xi$  и для других элементов. Для проверки этих расчетов был проведен ряд экспериментальных исследований, в основном с благородными газами [52, 53] (см. фиг. 3.7). Показано, что имеется хорошее согласие теории и эксперимента, особенно в ультрафиолетовой спектральной области, где факторы  $\xi$  сильно зависят от длины волны. Для кислорода фактор  $\xi$  был взят из работы Шлютера,



Ф и г. 3.7.  $\xi(\lambda)$  — фактор для криптона ( $T$  — параметр), рассчитанный несколькими авторами.

Результаты измерений отмечены треугольниками (по Берге и др. [53]); соответствующие кривые для водорода и аргона приведены на стр. 112



Ф и г. 3.8. Рассчитанный коэффициент поглощения кислорода.

Сплошные линии —  $\kappa^{fb}$  [см<sup>2</sup>] на один атом кислорода. Пунктирные линии —  $\kappa^{ff}$  [см<sup>2</sup>] на один атом кислорода и один электрон [27].

а рассчитанный классически континуум, возникающий при свободно-свободных переходах, умножался на поправочный коэффициент, вычисленный Пичем [54].

На фиг. 3.8 показана зависимость коэффициента поглощения кислорода от длины волны. Сплошные кривые представляют  $\kappa^{fb}$ , а пунктирные —  $\kappa^{ff}$ . Так как в этом случае температуры довольно низки, то было учтено образование отрицательных ионов. Это приводит к континууму, образуемому при прилипании электрона, и к тормозному излучению в полях нейтралов. Эти континуумы учтены при построении фиг. 3.8.

На фиг. 3.9 представлено сечение поглощения  $\sigma^-(\lambda)$  для отрицательного иона кислорода. Наконец, на фиг. 3.10 представлена сумма различных излучательных способностей в зависимости от длины волны для кислородной плазмы при давлении 1 атм и указанных температурах. Согласие с экспериментом хорошее. Следовательно, из измеренной интенсивности непрерывного излучения можно извлекать  $n_2^2$  при условии, что имеет место ЛТР и известен фактор  $\zeta$ .

На фиг. 3.10 видно, что в непрерывном спектре можно ожидать появления ряда разрывов в интенсивности, которые соответствуют границам серий. Больдт [55] пытался найти эти разрывы в излучении. Однако в действительности не удалось обнаружить ни одного разрыва, поскольку вблизи границы серий линии уширяются. Они в такой степени маскируют наблюдаемую картину непрерывного фона, что вообще с длинноволновой стороны от разрыва интенсивности континуума не удается приписать никакого осмысленного измеренного значения. Несмотря на многочисленные попытки, проведенные во всей видимой части спектра, истинное непрерывное излучение кислорода в промежутках между линиями можно было измерить только